Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques L3
Année 2004/2005
Calcul intégral

Contrôle continu du lundi 8 novembre 2004

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Il est inutile de recopier les questions. On demande de justifier les réponses. Les trois exercices ci-dessous sont indépendants. L'énoncé du contrôle continu comporte également, sur une feuille séparée, un questionnaire.

Exercice 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout ensemble A, soit $D_n(A) = \frac{1}{n}\,\mathrm{card}\,(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})$. Soit $\mathcal{D}$ la famille des parties A de $\mathbb{N}^*$ pour lesquelles la limite $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(A)$ existe. Cette limite est alors notée $D(A)$ et on l'appelle la densité de A. Enfin, soit $\mathcal{G}$ l'algèbre des parties finies ou cofinies de $\mathbb{N}^*$: donc $A \in \mathcal{G}$ si $A \subset \mathbb{N}^*$ et si, soit A est finie, soit $\mathbb{N}^* \setminus A$ est finie.

(a) Montrer que $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$ et $\mathcal{G} \neq \mathcal{D}$. Calculer la densité $D(A)$ pour $A \in \mathcal{G}$.

(b) Montrer que la famille $\mathcal{D}$ est stable par passage au complémentaire.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{D}$ est stable par union (finie) disjointe et que D est additive sur $\mathcal{D}$.

(d) Montrer que D n'est pas σ-additive sur $\mathcal{D}$.

(e) On note C l'ensemble des entiers pairs $2k$ tels qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ avec

$$2^{2n} < 2k \leqslant 2^{2n+1}.$$

Écrire $C \cap \{1, 2, \cdots, 8\}$ et $C \cap \{1, 2, \cdots, 16\}$. Montrer que $C \notin \mathcal{D}$.

(f) Soit B une partie de $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, exactement un et un seul des deux entiers $2n-1$ et $2n$ appartient à B. Montrer que $B \in \mathcal{D}$ et calculer sa densité $D(B)$.

(g) Exhiber deux parties B' et B'' de $\mathbb{N}^*$ qui vérifient les hypothèses de **(f)** et telles que $B' \cap B'' = C$.

(h) Déduire de **(e)**, **(f)** et **(g)** que la famille $\mathcal{D}$ n'est pas stable par intersection (finie).

Exercice 2

On note $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_+ = \{B : B \in \mathcal{B}, B \subset \mathbb{R}_+\}$, $\mathcal{S}$ la famille des segments $[a, b]$ avec $0 \leqslant a \leqslant b$, $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{S})$ et $\mathcal{F} = \{A : A \subset \mathbb{R}_+\} \cup \{A : A^c \subset \mathbb{R}_+\}$.

(i) Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu.

(ii) Montrer que $\mathcal{B}_+$ n'est pas une tribu.

(iii) Donner un exemple d'une partie B telle que $B \in \mathcal{B}$ et $B \notin \mathcal{F}$.

(iv) Sachant que $\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, donner un exemple d'une partie A telle que $A \in \mathcal{F}$ et $A \notin \mathcal{B}$.

T.S.V.P.

(v) Montrer que $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ et que cette inclusion est stricte.

(vi) Montrer que $\mathcal{B}_+ \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{B}$ et que ces inclusions sont strictes.

(vii) Montrer finalement que $\mathcal{T} = \mathcal{B} \cap \mathcal{F}$.

Exercice 3

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que sa dérivée $f' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable. On rappelle que ces hypothèses n'impliquent **pas** que f' est continue.

(1) Montrer que f est Riemann intégrable et que f' est bornée sur $[a, b]$.

Désormais on considère l'intégrale au sens de Riemann de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé et $c_n = \dfrac{b-a}{n}$. Pour tout entier $k \geqslant 0$, soit $a_k = a + k\, c_n$. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$, soit

$$m_k = \inf\{f'(x) : a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}\}, \quad M_k = \sup\{f'(x) : a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}\}.$$

Enfin, soit

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - c_n \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k).$$

(2) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$c_n \cdot m_k \leqslant f(a_{k+1}) - f(a_k) \leqslant c_n \cdot M_k.$$

En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_n \cdot m_k \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} c_n \cdot M_k.$$

(3) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et pour tout x dans $[a_k,\ a_{k+1}]$,

$$(x - a_k) \cdot m_k \leqslant f(x) - f(a_k) \leqslant (x - a_k) \cdot M_k.$$

En déduire que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\tfrac{1}{2}\, c_n^2 \cdot m_k \leqslant \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - c_n \cdot f(a_k) \leqslant \tfrac{1}{2}\, c_n^2 \cdot M_k.$$

Déduire de ceci un encadrement de $n\Delta_n$.

À l'aide des questions **(2)** et **(3)**, établir les résultats suivants :

$$\textbf{(4)} \ \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a). \quad \textbf{(5)} \ \lim_{n\to\infty} n\Delta_n = \frac{b-a}{2}(f(b) - f(a)).$$

Fin.