Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques L3
Année 2004/2005
Calcul intégral

Examen du lundi 10 janvier 2005

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Il est inutile de recopier les questions. Le sujet comprend un questionnaire, un exercice et un problème. Pour le questionnaire seulement, il est inutile de justifier les réponses. On demande de rédiger les réponses au questionnaire dans l'ordre des questions et sur une feuille intercalaire séparée.

Questionnaire

Q1) Écrire la définition d'une tribu.

Q2) Donner un exemple d'algèbre (ensembliste) qui n'est pas une tribu.

Q3) Écrire la définition d'une mesure sur une tribu.

Q4) Écrire la définition d'une fonction étagée.

Q5) Écrire l'énoncé du lemme de Fatou.

Q6) Écrire l'énoncé du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Q7) Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. Quand dit-on que $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction m-intégrable ?

Q8) Dire si l'énoncé suivant est vrai ou faux : soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction m-intégrable et $Z = \{x \in E\,;\, f(x) = 0\}$; si $m(Z) = 0$, alors $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}m \neq 0$.

Q9) Remplir les blancs numérotés dans le texte suivant.

Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ et $(F, \mathcal{S}, n)$ deux espaces mesurés $\underline{\textbf{(1)}}$ et $f : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{R}$-mesurable, avec $\mathcal{R} = \underline{\textbf{(2)}}$. On suppose que $\displaystyle\int \underline{\textbf{(3)}}\,\mathrm{d}(m \otimes n)$ est $\underline{\textbf{(4)}}$. Soit $M = \left\{x \in E\,;\, \displaystyle\int \underline{\textbf{(5)}}\,\mathrm{d}n \text{ est infinie}\right\}$. Alors, $m(M) = \underline{\textbf{(6)}}$. Soit $N = \left\{y \in F\,;\, \displaystyle\int \underline{\textbf{(7)}}\,\mathrm{d}m \text{ est infinie}\right\}$. Alors, $n(N) = \underline{\textbf{(8)}}$. Enfin,

$$\int_{E\times F} f\,\mathrm{d}(m\otimes n) = \int_{\underline{\textbf{(9)}}} \left(\int_{\underline{\textbf{(10)}}} \underline{\textbf{(11)}} \right) \underline{\textbf{(12)}} = \int_{\underline{\textbf{(13)}}} \left(\int_{\underline{\textbf{(14)}}} \underline{\textbf{(15)}} \right) \underline{\textbf{(16)}}.$$

Exercice

On note $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

E1) Montrer que $F(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que F est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

E2) Calculer la dérivée F' de F. Calculer F.

E3) Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Problème

Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré.

Partie A

On suppose dans cette partie que $m(E)$ est finie. Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbb{R}$ mesurables pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On suppose que f_n converge presque partout vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.

On note $A(n,t) = \{x \in E\,;\, \exists k \geqslant n,\ |f_k(x) - f(x)| \geqslant t\}$.

1) Montrer que $A(n,t) \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$.

2) Pour tout réel $t > 0$, montrer que $m(A(n,t)) \to 0$ quand $n \to \infty$.

3) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $m(A) \leqslant \varepsilon$ et tel que f_n converge vers f uniformément sur $E \setminus A$.

Indication On pourra chercher A de la forme $A = \displaystyle\bigcup_{i \geqslant 1} A(n(i), 1/i)$.

Partie B

Dans cette partie, on se donne une fonction m–intégrable $f : E \to \mathbb{R}^+$.

4) a) Montrer que f est la limite (simple) d'une suite croissante de fonctions positives, m–intégrables et bornées.

4) b) En déduire l'affirmation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall A \in \mathcal{T}, \quad m(A) \leqslant \eta \implies \int_A f\,\mathrm{d}m \leqslant \varepsilon.$$

5) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction λ–intégrable.

On pose $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction G ainsi définie est-elle continue, respectivement uniformément continue, sur $\mathbb{R}$?

6) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ de mesure $m(A)$ finie tel que la restriction de f à A est bornée et tel que $\displaystyle\int_{E\setminus A} f\,\mathrm{d}m \leqslant \varepsilon$.

Indication On pourra chercher un ensemble de la forme

$$A = \{x \in E\,;\, 1/n \leqslant f(x) \leqslant n\}.$$

Partie C

Dans cette partie, on se donne une fonction m-mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ et une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions m–intégrables $f_n : E \to \mathbb{R}$.

7) On suppose dans cette question que $\displaystyle\int |f - f_n|\,\mathrm{d}m \to 0$ quand $n \to \infty$.

Montrer que f est m–intégrable.

Montrer en utilisant la partie **B** les assertions **(i)** et **(ii)** ci-dessous.

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall A \in \mathcal{T}, \quad m(A) \leqslant \eta \implies \int_A |f_n|\,\mathrm{d}m \leqslant \varepsilon.$$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ de mesure $m(A)$ finie tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{E\setminus A} |f_n|\,\mathrm{d}m \leqslant \varepsilon.$$

8) On suppose dans cette question que f_n converge vers f presque partout quand n tend vers l'infini.

8) a) On suppose que $m(E)$ est finie et que l'assertion **(i)** ci-dessus est vérifiée.

Montrer en utilisant la partie **A** que la fonction f est m–intégrable et que $\displaystyle\int |f - f_n|\,\mathrm{d}m \to 0$ quand $n \to \infty$.

8) b) On suppose à présent que les assertions **(i)** et **(ii)** ci-dessus sont vérifiées.

Montrer que la conclusion de la question **8) a)** est encore valide, c'est-à-dire que f est m–intégrable et que $\displaystyle\int |f - f_n|\,\mathrm{d}m \to 0$ quand $n \to \infty$.

Fin