Fonctions d'une variable complexe
Contrôle continu
Mardi 12 avril 2005
Durée 3h00

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont formellement interdits.

**Exercice 1.** Soit $\Omega$ un ouvert connexe. Déterminer toutes les fonctions holomorphes définies sur $\Omega$ et à valeurs purement imaginaires (c'est-à-dire à valeurs dans $i\mathbb{R}$).

**Exercice 2.** Expliciter deux déterminations holomorphes distinctes du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

**Exercice 3.** Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+3)},$$

où $\gamma$ est le cercle de centre 1 et rayon 1 parcouru une seule fois dans le sens direct.

**Exercice 4.** Pouvez-vous dessiner un chemin fermé $\gamma$ tel que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = i\pi$ ?

**Exercice 5.** Soit $U = \mathbb{C} \setminus [0,1]$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^2 - z$.

a) i) Soit $\gamma$ le cercle de centre 0 et rayon 2 parcouru une fois dans le sens direct. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$.

ii) En déduire qu'il n'existe pas de fonction $\varphi$ holomorphe sur $U$ telle que $e^{\varphi(z)} = P(z)$ pour tout $z \in U$.

iii) L'ouvert $U$ est-il étoilé ? Justifier votre réponse.

b) On fixe $a \in ]0,1[$ et on pose $f_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-a}$ et $f_2(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-a}$.

i) Montrer que les fonctions $f_1$ et $f_2$ ont des primitives dans $U$.

ii) En déduire qu'il existe des fonctions $g_1$ et $g_2$ holomorphes dans $U$ telles que

$$e^{g_1(z)} = \frac{z}{z-a} \quad \text{et} \quad e^{g_2(z)} = \frac{z-1}{z-a} \quad \forall z \in U.$$

iii) Montrer alors qu'il existe $h$ fonction holomorphe sur $U$ telle que $h^2(z) = P(z)$ pour tout $z \in U$.

**Exercice 6.** On fixe un réel $a \in ]0,1[$ et on désigne par $\gamma$ le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct.

a) On note par $C_{2n}^n$ le coefficient binomial $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!^2}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} C_{2n}^n \frac{a^n}{4^n}$ est convergente. On note alors $f(a) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} C_{2n}^n \frac{a^n}{4^n}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}}\, dz = C_{2n}^n.$$

c) En déduire que
$$f(a) = -\frac{4}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{az^2 + 2(a-2)z + a}.$$

d) Calculer alors $f(a)$.

**Exercice 7.** Soit $U = \mathbb{C} \setminus i[-1,1]$.

a) Montrer que pour tout chemin fermé $\gamma$ tracé dans $U$, $\mathrm{Ind}_\gamma(i) = \mathrm{Ind}_\gamma(-i)$.

b) Montrer que pour tout chemin fermé $\gamma$ tracé dans $U$,
$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

c) Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ admet des primitives dans $U$.

d) Soit $F$ celle des primitives qui vérifie $F(1) = \frac{\pi}{4}$. Montrer que la fonction $G : U \to \mathbb{C}$ définie par
$$G(z) = \frac{z-i}{z+i}e^{-2iF(z)}$$
est constante et vaut $-1$.

e) Montrer que $\operatorname{tg} F(z) = z$ pour tout $z \in U$.