Fonctions d'une variable complexe
Examen terminal (2ème session)
Jeudi 7 juillet 2005
Durée 2h30

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont formellement interdits.

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$ tel que $f'(z_0) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $f(z) \neq f(z_0)$ pour tout $z \in D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - z_0| < R\} \setminus \{z_0\}$.

b) Pour $r \in]0, R[$, on pose $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{f(z) - f(z_0)}\, dz = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Exercice 2. On désigne par log la détermination principale du logarithme $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$, $\log z = \ln |z| + i \arg z$ où $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $\arg z \in] - \pi, \pi[$. On introduit la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = \log \frac{1+z}{1-z}$ où $\Omega = \mathbb{C} \setminus \big(] - \infty, -1] \cup [1, \infty[\big)$.

a) Montrer que si $z \in \Omega$ alors $\log \frac{1+z}{1-z}$ est bien défini et que la fonction f est holomorphe sur Ω.

b) Donner le développement en série entière autour de 0 de la fonction f en précisant aussi le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 3. Soit $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$.

a) Montrer que f n'a pas de primitive dans $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| > 1\}$.

b) Montrer que f possède des primitives dans $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$.

c) Expliciter une primitive de f dans $D(0, 1)$.

Exercice 4. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$ on considère les chemins suivants :

- $\alpha_\varepsilon(t) = \dfrac{e^{it}}{\varepsilon}$ pour $t \in [0, \pi]$,
- $\beta_\varepsilon(t) = t$ pour $t \in [-\frac{1}{\varepsilon}, -\varepsilon]$,
- $\mu_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ pour $t \in [\pi, 2\pi]$,
- $\delta_\varepsilon(t) = t$ pour $t \in [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$.

On introduit le chemin fermé $\gamma_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \vee \beta_\varepsilon \vee \mu_\varepsilon \vee \delta_\varepsilon$.

a) Dessiner le chemin γ_ε.

b) Donner les pôles et les résidus de la fonction $\dfrac{e^{iz}}{z}$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$.

c) Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$\frac{e^{iz}}{z} - \frac{1}{z} = f'$$

et en déduire que $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mu_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = i\pi$.

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0$. (On pourra utiliser l'inégalité $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.)

e) Montrer que la limite $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe et la calculer.