Université Claude-Bernard Lyon I

LICENCE DE MATHEMATIQUES 2004-2005

INFORMATIQUE

Examen

12 janvier 2005
9h-12h

On attachera la plus grande importance à la rédaction et aux justifications apportées.

Exercice I

On rappelle qu'un système d'indépendance est un couple $S = (E, \mathcal{F})$ où E est un ensemble et $\mathcal{F}$ est une famille héréditaire non vide de parties de E c'est-à-dire telle que :

$$\forall I \subset E \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad I \subset F \Rightarrow I \in \mathcal{F}$$

Soient $S = (E, \mathcal{F})$ un système d'indépendance et A une partie de E. Une partie $I \subset A$ est dite *indépendante maximale dans* A si $I \in \mathcal{F}$ et si $I \cup \{a\} \notin \mathcal{F}$ pour tout $a \in A \setminus I$.

1) On suppose dans cette question que S est un matroïde.

a) On note $\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$. Montrer que $S_A = (A, \mathcal{F}_A)$ est un matroïde.

b) En déduire que si $I \subset A$ et $J \subset A$ sont deux parties indépendantes maximales dans A alors $|I| = |J|$.

2) Réciproquement, on suppose que S est un système d'indépendance tel que pour toute partie A de E, si $I \subset A$ et $J \subset A$ sont indépendantes maximales dans A alors $|I| = |J|$. On se propose de démontrer que S est un matroïde. Soit $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ une pondération des éléments de E. On rappelle qu'une *solution optimale* pour la pondération ω est un indépendant $I \in \mathcal{F}$ tel que $\sum_{x \in I} \omega(x)$ est maximum.

a) Soit $\{e_1, \ldots, e_k\}$ une solution fournie par l'algorithme glouton appliqué à S avec $\omega(e_1) \geq \ldots \geq \omega(e_k)$ et soit $\{e'_1, \ldots, e'_l\}$ une solution optimale avec $\omega(e'_1) \geq \ldots \geq \omega(e'_l)$.

i) Montrer que $\{e_1, \ldots, e_k\}$ est un indépendant maximal et que $k \geq l$.

ii) Montrer que dans le cas où $k > l$ on peut compléter $\{e'_1, \ldots, e'_l\}$ en une solution optimale $\{e'_1, \ldots, e'_l, e'_{l+1}, \ldots, e'_k\}$ avec $\omega(e'_1) \geq \ldots \geq \omega(e'_k)$.

Dans la suite on considère une solution optimale $\{e'_1, \ldots, e'_k\}$ *à* k *éléments avec* $\omega(e'_1) \geq \ldots \geq \omega(e'_k)$.

b) Montrer que $\omega(e_1) \geq \omega(e'_1)$.

c) On veut montrer que pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq k$ on a $\omega(e_i) \geq \omega(e'_i)$. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un entier $i > 1$ vérifiant $\omega(e_i) < \omega(e'_i)$ et tel que pour tout j vérifiant $1 \leq j \leq i-1$ on a $\omega(e_j) \geq \omega(e'_j)$.
On pose $A = \{e \in E \mid \omega(e) \geq \omega(e'_i)\}$. Montrer que $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ est indépendant maximal dans A et en déduire une contradiction.

d) Enoncer un résultat du cours caractérisant les matroïdes et portant sur l'algorithme glouton.

e) Déduire de ce qui précède que S est un matroïde.

Exercice II

Une *arborescence* $\mathcal{A}$ est un arbre orienté qui possède un sommet (unique) r, appelé *racine* tel que pour tout sommet x, il existe un (unique) chemin $r = t_0, \ldots, t_k = x$ où $t_i t_{i+1}$ est une arête orientée, pour tout $i = 0 \ldots k-1$. Un *parcours en profondeur* de $\mathcal{A}$ est une énumération $x_1, \ldots, x_n$ des sommets de $\mathcal{A}$ telle que

- si $x_i x_j$ est une arête orientée, alors $i < j$.
- s'il existe un chemin dans $\mathcal{A}$ de x_i à x_j mais pas de x_i à x_k, et si $i < k$ alors $j < k$.

1) Enumérer les parcours en profondeur de l'arborescence ayant pour sommets $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et arêtes orientées $\{01, 02, 23, 24, 35, 36\}$.

2) On se propose de calculer le nombre de parcours en profondeur de $\mathcal{A}$.
Soit $x \in \mathcal{A}$ on note :

- $F(x)$ l'ensemble des fils de x (i.e. l'ensemble des sommets $y \in \mathcal{A}$ tels que xy est une arête orientée de $\mathcal{A}$).
- $f(x) := |F(x)|$, le nombre de fils de x.
- $\mathcal{A}(x)$ la sous-arborescence de $\mathcal{A}$ de racine x (i.e. la restriction de $\mathcal{A}$ à l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe un chemin de x à y).
- $nprof(x)$ le nombre de parcours en profondeur de $\mathcal{A}(x)$.

Montrer que

$$nprof(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(r) = 0 \\ f(r)! \prod_{x \in F(r)} nprof(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

3) Par convention $0! = 1$. Déduire que

$$nprof(r) = \prod_{x \in \mathcal{A}} f(x)!$$

4) Un *parcours en largeur* de $\mathcal{A}$ est une énumération $x_1, \dots, x_n$ des sommets de $\mathcal{A}$ telle que

- si $x_i x_j$ est une arête orientée, alors $i < j$.
- si $i < j$, si x_k est un fils de x_i et si x_l est un fils de x_j, alors $k < l$.

Enumérer les parcours en largeur de l'exemple énoncé en 1).
5) Comparer le nombre de parcours en largeur et le nombre de parcours en profondeur d'une arborescence $\mathcal{A}$. Justifier.

Exercice III

1) Soit G un graphe non orienté connexe.

a) Rappeler la définition d'un sommet séparateur de G.

b) Soit A un arbre en profondeur de G de racine r. Soit $\{x, y\}$ une arête de G. Que vérifient les sommets x et y dans l'arbre A ?

c) Soit x un sommet de G. Rappeler une condition nécessaire et suffisante portant sur l'arbre A, x et les arêtes de G pour que x soit un sommet séparateur de G. Justifier.

2) Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre des graphes orientés.

- la *distance* $d(u, v)$ entre deux sommets u et v est la longueur d'un plus court chemin orienté de u à v ; s'il n'existe pas de tel chemin, on pose $d(u, v) = \infty$.
- le *diamètre* d'un graphe G, noté $diam\,(G)$, est la plus grande des valeurs $d(u, v)$ pour u et v sommets du graphe :

$$diam\,(G) := \max\{d(u, v) : (u, v) \in V \times V\}.$$

Soit G un graphe connexe non orienté sans sommet séparateur. Soit P un chemin $x_0, \dots, x_k$ dans G de longueur maximum (les sommets x_i sont deux à deux distincts et $x_i x_{i+1}$ est une arête pour tout $i = 0, \dots, k-1$). On considère un arbre de parcours en profondeur A de G, de racine x_0, tel que P est un chemin de A. On oriente toute arête $\{x, y\}$ de G de x vers y lorsque :

- y est un fils de x dans l'arbre de parcours A
- x est un descendant de y dans A et l'arête $\{x, y\} \notin E(A)$

On obtient ainsi un graphe orienté D.

a) Montrer que ce graphe orienté D vérifie $diam(D) < \infty$.

b) Montrer plus fortement que son diamètre est égal à la longueur de P.