L1 MASS - UCBL - 2004-2005

Contrôle continu du 15 avril. Durée 1H30

calculatrices non programmables autorisées.

Exercice 1 (cours) :

- Donner la définition d'une probabilité.
- Énoncer le théorème de Bayes.
- Montrer que l'on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ par la loi de Poisson quand n tend vers $+\infty$ et np_n tend vers λ avec $0 < \lambda < +\infty$. On prendra soin de définir les deux lois en présence.

Exercice 2 :

Soit Ω un ensemble et P une probabilité sur Ω. Soient A, B et C trois événements. Montrer que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Exercice 3 : Les questions sont indépendantes.

Il s'agit de répartir b boules dans n urnes ($b \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$). Pour ce faire, on prend la première boule et on la place dans une urne choisie de manière équiprobable. Et on recommence pour les autres boules.

On suppose que les boules et les urnes sont discernables (elles sont numérotées).

a) Proposer un ensemble fondamental Ω et une probabilité sur Ω.

b) Soient les événements $A_i =$ "la i-ème urne est vide" ($1 \leq i \leq n$). Calculer les probabilités de ces événements.

c) Quelle est la probabilité de l'événement $B =$"chaque urne contient au plus une boule" ?

d) Soit C l'événement "aucune des trois premières urnes n'est vide". Écrire C en fonction des A_i. Calculer sa probabilité en utilisant la relation de l'exercice 2.

d) Soit X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne i ($1 \leq i \leq n$). Quelles est la loi de X_1 et pourquoi ? Donner aussi la loi de X_2.

e) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Pourquoi ?