

Examen du 31 mai 2005. Durée 2H00

Calculatrices non programmables autorisées.

Tous les résultats devront être justifiés.

**Exercice 1 (cours) :**

- Donner la définition d'une probabilité.
- Donner la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète. Calculer la fonction génératrice de la loi binomiale.
- Énoncer l'inégalité de Markov.

**Exercice 2 :**

Au sujet du référendum sur la constitution européenne, deux semaines avant le scrutin, on pouvait lire dans un journal gratuit à propos de ses lecteurs :

- 73% des gens ont pris leur décision qui est : oui pour 48,45% et non pour 51,55% ;
- 27% n'ont pas pris de décision mais se répartissent en trois catégories : 31% pensent voter oui, 24% pensent voter non et 45% ne savent vraiment pas.

Prenons une personne au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elle penche pour le oui ? Quelle est la probabilité pour qu'elle penche pour le non ?

**Exercice 3 :** Encore à propos des sondages sur la constitution européenne...

Deux semaines avant le scrutin, on a dressé l'état de l'opinion en résumant à la fois les sympathies politiques des français et leur vote dans le tableau ci-dessous. On note entre parenthèse sur la première ligne le poids relatif de chaque parti dans l'opinion.

	PC (10%)	PS (19%)	Verts (21%)	UDF (20%)	UMP (22%)	FN/MNR (8%)
oui	7%	54%	57%	70%	72%	12%
non	93%	46%	43%	30%	28%	88%

- Montrer que le score  $p$  du oui est 53,73%.
- On tire une personne au hasard. Elle dit vouloir voter oui. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit sympathisante UDF ?

**Exercice 4 :** On fait une enquête sur un échantillon de  $n = 100$  personnes. Soit  $X$  le nombre de personnes interrogées votant oui.

- a) Comme la probabilité pour que quelqu'un vote oui est 0,5373, quelle est la loi de  $X$  et pourquoi ?
- b) Par quelle loi la loi de  $F = X/n$  peut-elle être approchée et pourquoi ?
- c) En déduire  $P[F \leq 0.5]$ . Peut-on faire confiance à un échantillon de 100 personnes pour extrapoler le résultat final de l'élection ?
- d) Refaire les 3 questions précédentes avec  $n = 1000$ .

**Exercice 5 :** On voudrait maintenant préciser le vote des personnes ayant lu entièrement le texte de la constitution. On sait que ces personnes représentent 8% de la population.

- a) On reprend notre premier échantillon de taille  $n = 100$ . Soit  $K$  le nombre de personnes de cet échantillon ayant lu la constitution. Quelle est la loi de  $K$  et par quelle loi peut-on l'approcher ? En déduire  $P[K \leq 10]$ .
- b) On change de méthode. On veut interroger une personne qui a lu la constitution. Un agent appelle par téléphone des gens au hasard. Quelle est la loi du nombre  $N$  de personnes qu'il va interroger jusqu'à tomber sur quelqu'un qui a lu la constitution ? Quelle est l'espérance de  $N$  ? Trouver un nombre minimal  $m$  de personnes à interroger pour être sûr à 95% de trouver au moins une personne qui a lu la constitution.
- c) On veut maintenant interroger 20 personnes qui ont lu la constitution. On demande à 20 agents d'enquêter de manière indépendante. Quel est la moyenne du nombre total  $N_{\text{total}}$  de personnes qui vont être interrogées. Calculer la variance de  $N_{\text{total}}$ .

*Nota bene :* les données sont dues à IFOP, IPSOS, 20 minutes.