

Examen du 6 juillet 2005. Durée 1H30

Calculatrices non programmables autorisées.

Tous les résultats devront être justifiés.

**Exercice 1 (cours) :**

- Soient  $A$  et  $B$  deux événements sur un espace  $(\Omega, P)$ . Que signifient les assertions :

a)  $A$  et  $B$  sont disjoints,

b)  $A$  et  $B$  sont indépendants ?

- Donner la définition d'une variable aléatoire.

- Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

**Exercice 2 :**

Soit  $X$  une variable aléatoire continue dont la densité est donnée sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} ax(x-2) & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $a$  est un réel négatif.

a) Donner la valeur de  $a$ .

b) Tracer la densité de  $X$ .

c) Calculer et tracer la fonction de répartition de  $X$ .

d) Quelle est l'espérance, la variance de  $X$  ?

e) Que vaut

$$P\left[X \leq \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad P\left[\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{4}{3}\right]$$

**Exercice 3 :** Un étudiant que nous appellerons Jean décide de sortir danser sur un célèbre bateau à quai à Lyon. Il ne sait jamais comment s'habiller et laisse au hasard le soin de choisir pour lui.

Ainsi, il dispose dans sa garde-robe de trois costumes, notés C1, C2 et C3. Le costume C1 est très chic et Jean, quand il le porte est autorisé à entrer dans la boîte de nuit avec une probabilité égale à 0,95. Le costume C2 est plus simple, et Jean ne se fait accepter que dans 50% des cas. Enfin, le costume C3, le préféré de Jean, est franchement décontracté, et ainsi vêtu, Jean est refusé avec une probabilité égale à 80%.

Voici sa technique pour décider. Il lance deux dés. Si le maximum de deux nombres obtenus est supérieur à 5, il s'habille avec son costume C1. Sinon, il lance une pièce de monnaie et porte le costume C2 si pile, le costume C3 si face.

a) Quelle est la probabilité pour que Jean porte le costume C1 ? le costume C2 ? le costume C3 ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'il se fasse refouler ?

c) Jean n'est pas accepté ce soir et ne peut pas aller danser. Quelle est la probabilité pour qu'il porte le costume C1 ? le costume C3 ?

d) Pendant les vacances universitaires, Jean va partir vers la boîte presque tous les soirs. A la fin de l'été, il aura comptabilisé un nombre de sorties suivant une loi de Poisson de paramètre 20, mais il a parfois été rejeté. Sous des hypothèses naturelles à préciser, calculer la loi du nombre de soirées que Jean a passé en boîte. Quelle est la moyenne et la variance de ce nombre ?