Université Claude Bernard

Contrôle continu de Mathématiques

L1, Groupe 2, MATH 2: Fonctions de Plusieurs Variables

Vendredi 5 Novembre 2004

Dure : 1 heure 30 minutes

Calculatrices, téléphones et tous documents sont interdits.

Exercice I. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :
$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

(1) Calculer le gradient de f.

(2) Déterminer la longueur du gradient de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'elle ne change pas le long du cercle $x^2 + y^2 = r^2$, où r est un réel strictement positif fixé.

(3) Calculer la longueur du vecteur $\vec{v}(3, 4)$. Trouver $\cos\theta$ et $\sin\theta$, où θ est l'angle entre le vecteur $\vec{v}$ et le vecteur $\vec{\imath}(1, 0)$ qui dirige l'axe des abscisses (Ox).

(4) Trouver la dérivée directionelle de f dans la direction du vecteur $\vec{v}$ au point $(1, 2)$. (On pourra utiliser le fait que lorsque f est différentiable, la dérivée de f dans la direction du vecteur *unitaire* $\vec{U}$ vaut $D_{\vec{U}} f = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \vec{U}$.)

Exercice II. (1) On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $g(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$. Déterminer la différentielle de g en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(2) A l'aide de la question précédente, trouver une valeur approchée de $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$.

Exercice III. Soit l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} h(x, y) = \dfrac{xy + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ h(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Etablir si h est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice IV. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

(1) Déterminer les points critiques de F sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Etudier les extrema locaux de F sur $\mathbb{R}^2$.
(3) On considère le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (a) Justifier l'existence d'un maximum absolu M et d'un minimum absolu m pour la restriction de la fonction F à D.
   (b) Soit $(x,y) \in D$. Démontrer que si $F(x,y) = M$ ou si $F(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
   (c) Etudier la fonction $t \mapsto F(\cos t, \sin t)$. Déterminer les nombres M et m.