

**Examen de Mathématiques 2**  
**le mercredi 25 mai de 8 heures à 10 heures**

**Calculatrices interdites**

**Problème I.** On considère la courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $x(t) = a \cos^2 t$ ,  $y(t) = a \sin t \cos t$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Ici,  $a > 0$  est une constante.

- a) Esquisser le tracé de  $\mathcal{C}$ . Vérifier graphiquement que  $\mathcal{C}$  enferme un domaine  $D$ .
- b) Quand  $t$  augmente, de quel côté de la courbe  $\mathcal{C}$  se trouve  $D$ ?
- c) Calculer la longueur de  $\mathcal{C}$  et l'aire de  $D$ . Quelle est la longueur de  $\mathcal{C}$  si l'aire de  $D$  vaut  $\pi$ ?

d) Calculer l'intégrale  $\iint_D x^2 dx dy$ . [Indications : on a  $D = \{x = ar \cos^2 t, y = ar \sin t \cos t ; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, r \in [0, 1]\}$ . Par ailleurs, on pourra utiliser la formule  $\cos^6 t = \frac{\cos(6t) + 6 \cos(4t) + 15 \cos(2t) + 10}{32}$ ].

e) Sans faire (trop) de calculs, déterminer la circulation  $\int_{\mathcal{C}} (P dx + Q dy)$ , où  $P = -x^2 y$  et  $Q = x^3$ .

**Problème II.** On considère la surface  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = x^2 + y^2\}$  (elle s'obtient en faisant tourner autour de l'axe  $Oz$  la parabole  $z = y^2$ ).

- a) Esquisser la parabole  $z = y^2$ , puis  $S$ .
- b) Soit  $a > 0$  une constante. Déterminer graphiquement la partie  $U_a$  de l'espace délimitée par  $S$  et par le plan horizontal  $\{(x, y, z) ; z = a\}$  (c'est-à-dire, la partie de l'espace située au dessus de  $S$  et en dessous du plan). Calculer, en fonction du paramètre  $a$ , le volume de  $U_a$ .

c) On fait couler, à l'intérieur de  $S$ , un kilogramme d'eau. Une fois l'équilibre atteint, jusqu'à quelle hauteur va monter le liquide ?

Dans la suite de l'exercice, on prend  $a = 1$ .

d) Déterminer graphiquement le bord  $\Sigma$  de  $U_1$ .

On désigne par  $\Sigma_1$  la partie de  $\Sigma$  contenue dans  $S$  et par  $\Sigma_2$  la partie de  $\Sigma$  contenue dans le plan  $\{(x, y, z) ; z = 1\}$ .

e) Quelle est l'aire de  $\Sigma_2$  ? Si  $X$  est un point de  $\Sigma_2$ , quel est le vecteur normal  $\vec{n}$  extérieur à  $U_1$  en  $X$  ?

On oriente  $\Sigma$  avec la normale extérieure à  $U_1$ .

f) Calculer le flux, à travers  $\Sigma_2$ , du champ  $\vec{V} = (-2x, y, z)$ .

g) Calculer le flux de ce même champ  $\vec{V}$  à travers  $\Sigma$ . Quel est le flux de  $\vec{V}$  à travers  $\Sigma_1$  ?

h) Calculer l'aire de  $\Sigma_1$ .