

Université Claude Bernard Lyon I
Licence “Sciences et technologie”
Unité d’enseignement “Mathématiques II-1 (Analyse)” (groupe 1)

Épreuve de contrôle continu

mardi 30 novembre 2004 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculatrices n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

Soit la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = \frac{1 + 2t}{t^2} \end{cases}$$

Étudier cette courbe, et en fournir un tracé.

Il est notamment demandé de :

- * préciser la nature du point singulier, et la tangente en ce point ;
- * justifier de l'absence de points d'inflexion.

Il serait apprécié, si vous constatez *a posteriori* une symétrie remarquable de la courbe, que vous démontreriez en fin d'exercice l'existence de cette symétrie.

Exercice 2

On considère la suite récurrente définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \geq 0, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

- 1) Tracer le graphe de la fonction définie par $f(t) = 1 + \frac{1}{t}$.
- 2) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 1$.
- 3) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \frac{3}{2}$.
- 4) Si la suite (u_n) converge, quelle peut être sa limite ? On notera l le réel qu'on vient de déterminer.
- 5) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$|u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|.$$

- 6) Conclure.

(TSVP)

Exercice 3

On note

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\},$$

puis on pose

$$\Delta = \{\|\vec{PQ}\| \mid P \in D_1, Q \in D_2\}.$$

- 1) Montrer que Δ possède une borne inférieure, qui est 0.
- 2) Montrer que Δ possède une borne supérieure, qui est 4.
- 3) L'ensemble Δ possède-t-il un plus petit élément, un plus grand élément ?