Mathématiques II Analyse
Contrôle continu
Mercredi 6 avril 2005
Durée 1h30

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont formellement interdits.

Exercice 1.

a) Soit (a_n) une suite monotone et convergente. Expliciter

$$\inf\{a_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{et} \qquad \sup\{a_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$$

en fonction des éléments de la suite et de sa limite.

b) Soit (x_n) une suite bornée. On considère les sous-suites $y_n = x_{2n}$, $z_n = x_{2n+1}$ et on pose

$$M = \sup\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad M_1 = \sup\{y_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad M_2 = \sup\{z_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Montrer que $M = \max(M_1, M_2)$. Quelle égalité obtient-on si l'on remplace partout sup par inf ?

c) Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure, si elles existent, de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n + 1 - \frac{(-1)^n}{2}},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exercice 2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$0 < u_0 < v_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et strictement positives.

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont décroissantes.

c) Que peut-on dire de la suite $(v_n - u_n)$?

d) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 3.

a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

c) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2} \leq \ln(a_n) \leq \frac{n+1}{2n}.$$

d) En déduire que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.