Université Claude Bernard Lyon I

Licence “Sciences et technologie”

Unité d’enseignement “Mathématiques II-1 (Analyse)” (groupe 1)

Examen terminal (première session)

mardi 11 janvier 2005 - Durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l’ordre de votre choix. L’utilisation de documents de toute nature et de calculettes n’est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

Soit f une fonction de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\text{pour tous } x, y \text{ dans } [0,1], |f(x) - f(y)| \leq 8\,|x-y|^{1/3}$$

Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \frac{[(n-1)!]^3}{(3n)!}.$$

1) Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{27}$ quand n tend vers l’infini

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est une suite strictement décroissante.

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4) En utilisant la question 1), déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Pour chaque entier $n \geq 1$, on note

$$I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n \, dx.$$

1) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante.

2) En effectuant une intégration par parties dans l’expression de I_{n+1}, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

(TSVP)

3) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}.$$

En déduire la convergence de (I_n) et la valeur de sa limite.

4) Justifier pour tout $n \geq 1$ l'inégalité,

$$0 \leq I_{n+1} \leq \frac{2(\ln 2)^{n+2}}{n+2}$$

puis en déduire que quand $n \to +\infty$,

$$\frac{I_{n+1}}{n+1} = o\left(\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}\right).$$

En déduire un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

1) En explicitant une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$, montrer que $\displaystyle\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$ est une intégrale impropre divergente.

2) En effectuant le changement de variable $t = \ln x$, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)[\ln(\ln x)]}$ est également divergente.

Exercice 5

Dans cet exercice, on note $g(t) = t + \sin t + e^t - 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t + \sin t + e^t - 1}$.

1) a) Trouver un équivalent simple de $\sin(\sqrt{t})$ quand $t \to 0$.
   b) Donner un développement limité à l'ordre 1 en 0 de $g(t)$.
   c) En déduire un équivalent en 0 de $f(t)$.
   d) Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

2) a) Donner un équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{1}{g(t)}$.
   b) Étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{g(t)}\,dt$.
   c) En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.