Université Claude Bernard Lyon 1 2004-2005

Mathématiques II Analyse
Examen terminal (deuxième session)
Mercredi 29 juin 2005
Durée 1h30

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont formellement interdits. Justifiez soigneusement vos réponses.

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{6} + 1.$$

a) Montrer que $u_n \in [1,2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer l'inégalité

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{2}{3}|u_n - u_{n-1}|$$

pour tout $n \geq 1$.

c) En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy.

d) Justifier l'existence de la limite de la suite (u_n) et la calculer.

Exercice 2. On considère les intégrales généralisées suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx, \qquad J = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} \, dx, \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \, dx.$$

a) Montrer la convergence de ces trois intégrales.

b) Montrer que $J = -\int_0^1 e^{-x} \ln x \, dx$.

c) Montrer que $K = \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$.

d) En déduire que $I = -J + K$.

Exercice 3. On considère la courbe paramétrée par $M(t) = (t^3 - t^2 - t, t^4 + t^3 + t^2 - 9t)$, $t \in [0, \infty[$.

a) Trouver tous les points stationnaires.

b) Déterminer le type de chaque point stationnaire.

c) Déterminer les branches infinies ; pour chaque branche infinie préciser la direction asymptotique, s'il y a lieu, et le type de branche infinie.