Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Première année

Unité d'enseignement Math II-ALGEBRE

Epreuve de mathématiques

Examen

6 Janvier 2005 – durée : 2 h

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1 Soit n un entier positif et soient a, b deux réels. On considère le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.
1) Calculer le polynôme dérivé P'.
2) Déterminer les réels a et b tels que P soit divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 2 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^3 + X^2 + X - 2}{X^3(X-1)}.$$

Exercice 3 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $3u(e_1) + 4u(e_2)$. En déduire que $(u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\mathrm{im}(u)$.
2) Donner le rang de u.
3) Donner une base de $\ker(u)$.
4) Quel est le déterminant de u?

Exercice 4 Soit n un entier, $n \geq 2$. Calculer le déterminant de la matrice B de taille $n \times n$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \dots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On distinguera les cas $n = 2$ et $n > 2$.

Exercice 5 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B. Soit C la matrice de $M_3(\mathbb{R})$:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de C et le factoriser.
2) Donner les valeurs propres de C ainsi qu'une base B' de vecteurs propres associés.
3) Donner la matrice de passage P de B à B'.
4) Calculer P^{-1}.
5) Soit X une matrice vérifiant la relation $X^2 = C$. On pose $Y = P^{-1}XP$.
a) Donner explicitement Y^2.
b) Trouver une matrice X vérifiant l'équation $X^2 = C$.