Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques II-2 (Algèbre)"

Examen terminal (deuxième session)

Fin juin ou début juillet 2005 - Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur une seule page

Exercice 1

Soit $u\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 6 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de u. En déduire l'ensemble des valeurs propres de u.

2) A l'aide d'un calcul de rang, et sans calculer les espaces propres, montrer que u est diagonalisable.

3) Déterminer les espaces propres de u.

4) Expliciter une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 2

On note $\mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

On note $P = (X-7)(X-107)$, $Q = (X-107)(X-1007)$ et $R = (X-7)(X-1007)$.

1) Montrer que (P, Q, R) est une famille libre.

2) Montrer que (P, Q, R) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

3) Déterminer les coordonnées dans cette base du polynôme $X - 7$.

Exercice 3

1) Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbf{K}$, et u un endomorphisme de E.
On suppose que u est injectif mais n'est pas surjectif.
Que peut-on dire de la dimension de E ?

2) Donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ qui soit injectif mais pas surjectif. (Dans cette question, $\mathbf{R}[X]$ est considéré comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$).

Exercice 4

1) Montrer que deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ qui n'ont aucune racine (complexe) commune sont premiers entre eux.

2) L'énoncé suivant est-il vrai ou faux ? (on justifiera sa réponse) : deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ qui n'ont aucune racine (réelle) commune sont premiers entre eux.