Université Claude Bernard Lyon 1

Licence “Sciences et technologie”

Unité d’enseignement “Mathématiques III-1 (Analyse)”

Épreuve de contrôle continu

jeudi 7 avril 2005 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les deux exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l’ordre de votre choix. L’utilisation de documents de toute nature et de calculettes n’est pas autorisée. Le sujet comporte deux pages (une feuille imprimée recto-verso).

Exercice 1

Préciser la nature de chacune des séries suivantes :

a) $\sum e^{-n^2}$

b) $\sum e^{-\frac{n^2+1}{n+1}}$

c) $\sum e^{-\sqrt{n}}$

d) $\sum e^{-\ln n}$

e) $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$

f) $\sum (-1)^n e^{-\sqrt{\ln n}}$

Exercice 2

On considère la **suite** $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions à valeurs réelles, définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}.$$

1) Montrer que cette suite converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l’on déterminera. Dans les questions suivantes, la notation f continuera à désigner la limite simple de la suite (f_n).

2) La fonction f est-elle continue sur $[0,+\infty[$? La convergence de la suite (f_n) est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

3) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$(x^2+1)e^{-x} \leq 1$$

4) Soit α un réel strictement positif. Montrer que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur $[\alpha,+\infty[$.

5) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$ et tout $n \geq 1$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1.$$

(TSVP)

6) a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \int_0^{\epsilon/2} (f_n(x) - f(x))\, dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

et qu'il existe un $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \int_{\epsilon/2}^1 (f_n(x) - f(x))\, dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

b) En déduire que la limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

existe, et calculer sa valeur.