Université Claude Bernard Lyon I
Licence "Sciences et technologie"
Unité d'enseignement "Mathématiques III-1 (Analyse)" (groupe 1)

Examen terminal (première session)

jeudi 6 janvier 2005 - Durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur trois pages (une feuille imprimée recto-verso **et** *une feuille séparée contenant des questions sur le cours).*

Exercice 1
On considère la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$$

(dans laquelle on note x une variable réelle).

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
Dans toute la suite de l'exercice, on notera R ce rayon de convergence, et f la fonction somme de la série entière en les points où celle-ci converge.

2) Montrer que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-R, R]$, et continue sur cet intervalle.

3) Déterminer trois réels A, B et C tels que pour tout entier $n \geq 1$, on ait la relation

$$(*) \qquad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{2n+1}$$

En déduire une expression de f valable sur $]-R, R[$ faisant intervenir des fonctions bien connues.

Exercice 2
(Dans cet exercice, la lettre θ dénote une variable réelle).

1) a) On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n}$$

Montrer que cette série de fonctions est normalement convergente sur $\mathbf{R}$ et déterminer sa somme, qu'on exprimera sous la forme $a(\theta) + ib(\theta)$, où a et b sont des fonctions à valeurs réelles.

(TSVP)

b) Déduire du calcul qui précède une expression de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{2^n}.$$

2) Calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

(On pourra introduire une fonction h développable en série entière telle que $S = h(\frac{1}{2})$).

3) On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n2^n}$$

a) Montrer que cette série est normalement convergente sur $\mathbf{R}$.
On notera $f(\theta)$ sa somme.

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}$, et calculer f'.

c) Conclure en fournissant une expression de $f(\theta)$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y - 2 = 0$$

(où la variable réelle est notée x et l'inconnue y).
Montrer qu'il y a au plus une série entière dont la somme soit solution de (E) sur l'intervalle de convergence.

Rappelez ici le “Numéro à reporter sur les intercalaires”
figurant sur votre copie :

Unité d’enseignement “Mathématiques III-1 (Analyse)” (groupe 1)
Examen du 6 janvier 2005

Ce questionnaire est **à rendre avec votre copie**. Il n’est demandé **aucune justification**, même succincte de vos réponses. Si vous avez des ratures à faire, n’hésitez pas à nous demander un nouvel exemplaire.

Question 1 : pour une série de fonctions réelles d’une variable réelle

a) La convergence simple entraîne la convergence normale	VRAI	FAUX
b) La convergence simple entraîne la convergence uniforme	VRAI	FAUX
c) La convergence uniforme entraîne la convergence simple	VRAI	FAUX
d) La convergence uniforme entraîne la convergence normale	VRAI	FAUX
e) La convergence normale entraîne la convergence simple	VRAI	FAUX
f) La convergence normale entraîne la convergence uniforme	VRAI	FAUX

Question 2 : a désigne un réel quelconque et $\sum f_n$ une série quelconque de fonctions continues de $[a, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$. Pour chacun des énoncés suivants, dire s’il est vrai ou faux.

Énoncé 1 : Si pour tout b avec $a \leq b$ il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur l’intervalle $[a, b]$, alors il y a convergence uniforme de cette série sur $[a, +\infty[$.

Énoncé 2 : Si pour tout b avec $a \leq b$ il y a convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur l’intervalle $[a, b]$, alors il y a convergence simple de cette série sur $[a, +\infty[$.

Énoncé 3 : Si pour chaque n fixé, $f_n(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, avec convergence uniforme de la série $\sum f_n$ vers une fonction S alors $S(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Énoncé 4 : Si pour chaque n fixé l’intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge, avec convergence uniforme de la série $\sum f_n$ vers une fonction S alors l’intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} S(t)\,dt$ converge aussi.

Énoncé 1	VRAI	FAUX
Énoncé 2	VRAI	FAUX
Énoncé 3	VRAI	FAUX
Énoncé 4	VRAI	FAUX

Question 3 : énoncer le théorème d’Abel relatif aux séries numériques.