UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

Contrôle Continu UE MathIII-2-Probabilités

Epreuve écrite du 7 Décembre 2004

Durée 1h30

Les calculatrices et les documents sont interdits

EXERCICE 1

On lance n fois de suite ($n \geq 2$) un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

On notera $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $M = \{1,2,3,4,5\}$

1. Expliciter un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ qui modélise cette expérience.

2. On note A_r l'événement « obtenir pour la première fois un élément de l'ensemble M au $r^{\text{ième}}$ lancer du dé ».

   a) Les évènements A_r, $r \in \{1,2,\ldots,n\}$, forment-ils un système complet d'évènements (c'est à dire une partition de Ω) ?

   b) Calculer $q_r = P(A_r)$.

3. On note $B_{r,n}$ l'événement « obtenir pour la première fois un élément de l'ensemble M au $r^{\text{ième}}$ lancer et pour la première fois un élément de M au $n^{\text{ième}}$ lancer autre que celui obtenu au $r^{\text{ième}}$ lancer ».

   a) Calculer $p_{r,n} = P(B_{r,n})$.

   b) En déduire la probabilité de l'événement « le nombre de lancers pour obtenir 2 éléments distincts de M est égal à n ».

PROBLEME

Un joueur joue à pile ou face en utilisant une pièce non équilibrée, affichant pile avec la probabilité p_0 telle que $0 < p_0 < 1$ et $p_0 \neq \dfrac{1}{2}$.

Avant chaque lancer de la pièce, le joueur fait un pari. Le joueur gagne si le pari s'avère exact. Les paris successifs sont effectués suivant deux modalités :

(M1) à chaque lancer de la pièce, le joueur parie pile ou face, avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ pour chaque éventualité;

(M2) le joueur lance la pièce une fois sans parier (à titre d'essai dans un lancer qui ne compte pas), observe le résultat obtenu et parie ce résultat au premier lancer; au second lancer, il parie le résultat obtenu au premier et continue ainsi en pariant à chaque lancer le résultat obtenu au lancer précédent.

1. En utilisant les évènements E_i : « parier pile au i$^{\text{ième}}$ lancer » avec $i \geq 1$, et P_k : « obtenir pile au k$^{\text{ième}}$ lancer » avec $k \geq 0$, ainsi que l'événement G_i : « gagner au i$^{\text{ième}}$ lancer » avec $i \geq 1$:

a) Expliciter et calculer, pour chacune des modalités envisagées, la probabilité de parier pile lors du premier lancer de la pièce.

b) Le résultat précèdent reste-t'il valable lors du i$^{\text{ième}}$ lancer de la pièce, avec $i \geq 1$?

c) Donner la relation liant G_i à E_i et P_i pour $i \geq 1$, et en déduire la probabilité de gagner lors d'un lancer de la pièce.

d) Quelle modalité de paris fournit la plus grande probabilité de gain lors d'un lancer ?

Dans la suite, on suppose que le joueur effectue les paris suivant la modalité (M2). La probabilité de gain à chaque lancer est donc le réel p, $0 < p < 1$, calculé en 1 c). Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment de la question 1 en utilisant la notation p proposée.

2.

a) Quelle est la probabilité de gagner r fois en n lancers, $n \geq 2$ et $0 \leq r \leq n$?

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire donnant le nombre de lancers gagnants en n lancers.

3.

a) Quelle est la probabilité pour que, lors d'une suite infinie de lancers, le r $^{\text{ième}}$ lancer soit le premier lancer gagnant ($r \geq 1$) ?

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire donnant le temps d'attente du premier lancer gagnant.

c) Calculer la probabilité pour que, lors d'une suite infinie de lancers, le joueur ne gagne pas lors des r premiers lancers. En déduire la probabilité pour que le joueur gagne au moins une fois dans une suite infinie de lancers.

4. Le joueur reçoit un point s'il gagne lors d'un lancer et donne un point s'il perd. On suppose le nombre de lancers pair et égal à $2n$, $n \geq 1$.

a) Préciser la loi de la variable aléatoire Y_1 donnant le gain lors du premier lancer, puis celle de la variable aléatoire Y_i donnant le gain lors du i$^{\text{ième}}$ lancer. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y_i avec $i \geq 1$.

b) Montrer que le gain cumulé au cours des $2n$ lancers est un entier pair $2k$, avec $-2n \leq 2k \leq 2n$.

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire donnant le gain cumulé au cours des $2n$ lancers.

d) Quelle est la probabilité pour que le gain cumulé au cours des $2n$ lancers soit nul ?