**Université Claude Bernard Lyon I**
**UFR de Mathématiques**

**Licence Sciences et Technologies $2^{\text{ème}}$ Année**
**Mathématiques III - Probabilités**

Contrôle Continu du 12 avril 2005
Durée : 1h 30
*Aucun document n'est autorisé*

**Exercice 1** Une urne contient 5 boules noires, 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire au hasard de cette urne 2 boules à la fois et on considère les événements $A =$ " Les deux boules tirées sont de couleurs différentes " et $B =$ " Au moins une boule tirée est de couleur noire ".

1. Quelle probabilité $P$ convient-il de considérer pour modéliser cette expérience ?
2. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
3. Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

**Exercice 2** On répartit au hasard 5 boules indiscernables dans 4 cases distinctes $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$. Ces répartitions s'identifient à des combinaisons avec répétition que l'on considère comme équiprobables. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules placées dans la case $C_1$.

1. Quelles sont les valeurs de $X$ ?
2. Déterminer la loi de $X$ et calculer sa moyenne.

**Exercice 3** Un récepteur est actif dans l'intervalle de temps $I = [0, 20]$ et capte uniquement les messages reçus durant cette période. On considère que l'instant de réception du début d'un message est uniformément réparti sur l'intervalle $I$.

1. On suppose dans cette question que la longueur d'un message est égale à 3. Quelle est la probabilité que le message puisse être entièrement transmis au récepteur ?
2. On suppose maintenant que la longueur d'un message est une variable aléatoire $X$ telle que $P\{X = 1\} = 1/2$, $P\{X = 3\} = 1/3$ et $P\{X = 5\} = 1/6$.
   (a) Quelle est la longueur moyenne d'un message ?
   (b) Quelle est la probabilité que le message puisse être entièrement transmis au récepteur ?

**Exercice 4** On lance dix fois de manière identique et indépendante une pièce de monnaie. A chaque lancer, la probabilité que cette pièce tombe sur pile est $p$, $0 < p < 1$.

1. Quelle est la probabilité que cette pièce tombe sur pile au premier *et* au deuxième lancer ?
2. *Sachant* que la pièce est tombée sur pile trois fois, quelle est la probabilité qu'elle soit tombée sur pile au premier lancer ?

Corrigé

**Exercice 1**

1. L'ensemble des réalisations est $\Omega = \mathcal{P}_2(10)$. C'est l'ensemble des parties à deux éléments d'un ensemble à 10 éléments. On choisit la probabilité uniforme $P$ sur $\Omega$. On a donc, pour $A \subset \Omega$, $P(A) = \dfrac{Card(A)}{45}$.

2. $Card(A) = Card(T_{NR}) + Card(T_{RV}) + Card(T_{VN}) = C_5^1.C_3^1 + C_3^1.C_2^1 + C_2^1.C_5^1 = 15 + 6 + 10 = 31$. D'où, $P(A) = \dfrac{31}{45}$.
$Card(B) = Card(T_{NR}) + Card(T_{NV}) + Card(T_{NN}) = C_5^1.C_3^1 + C_5^1.C_2^1 + C_5^2 = 15 + 10 + 10 = 35$. Cela donne $P(B) = \dfrac{35}{45}$.

3. $A \cap B = T_{NR} \cup T_{NV}$. Donc, $P(A \cap B) = \dfrac{25}{45} = \dfrac{225}{405} \neq P(A) \cdot P(B) = \dfrac{217}{405}$. Les événements $A$ et $B$ ne sont pas indépendants.

**Exercice 2**

1. $X(\Omega) = [\![0\,,5]\!]$.

2. Le nombre total de répartitions de 5 boules indiscernables dans 4 cases est $K_4^5 = C_8^3 = 56$. Soit $i \in [\![0\,,5]\!]$. $Card\{X = i\}$ est le nombre de façons de placer $5 - i$ boules indiscernables dans 3 cases, ce qui est égal à $K_3^{5-i} = C_{7-i}^2 = (7-i)(6-i)/2$. Donc, $p_i = P\{X = i\} = \dfrac{(7-i)(6-i)}{2.56}$. Ainsi, $p_0 = \dfrac{21}{56}$, $p_1 = \dfrac{15}{56}$, $p_2 = \dfrac{10}{56}$, $p_3 = \dfrac{6}{56}$, $p_4 = \dfrac{3}{56}$ et $p_5 = \dfrac{1}{56}$.
La moyenne de $X$ est $\mathbb{E}X = (0.21 + 1.15 + 2.10 + 3.6 + 4.3 + 5.1)/56 = \dfrac{70}{56} = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

**Exercice 3**

On note $E =$ " le message est entièrement transmis ".

1. $P(E) = \dfrac{17}{20} = 0,85$.

2. (a) $\mathbb{E}X = 1.1/2 + 3.1/3 + 5.1/6 = 14/6 = 7/3 = 2,33$
   (b) $P(E) = P(E \mid X = 1)P\{X = 1\} + P(E \mid X = 3)P\{X = 3\} + P(E \mid X = 5)P\{X = 5\} = (19.1/2 + 17.1/3 + 15.1/6)/20 = \dfrac{57 + 34 + 15}{120} = \dfrac{106}{120} = \dfrac{53}{60} = 0,883$.

**Exercice 4**

On note $A =$ " La pièce est tombée sur pile 3 fois en 10 lancers ",
$B =$ " Parmi les lancers 2 à 10, la pièce est tombée sur pile 2 fois " et, pour $i = 1, 2$,
$E_i =$ " La pièce est tombée sur pile au lancer N° i ".

1. $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = p^2$.

2. $P(E_1 \mid A) = \dfrac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(E_1 \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(E_1) \cdot P(B)}{P(A)} = \dfrac{p \cdot C_9^2 p^2 (1-p)^7}{C_{10}^3 p^3 (1-p)^7} = \dfrac{C_9^2}{C_{10}^3} = \dfrac{3}{10}$.