Université Claude Bernard Lyon I — **Licence Sciences et Technologies 2$^{\text{ème}}$ Année**
UFR de Mathématiques — **Mathématiques III - Probabilités**

Examen du 31 mai 2005
Durée : 2h
Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 On considère 4 personnes numérotées de 1 à 4 qui arrivent devant un guichet et à qui on attribue des rangs au hasard dans la file d'attente. L'espace des réalisations Ω est donc l'ensemble des permutations de $[\![1,4]\!]$, de cardinal 24, muni de la probabilité uniforme P. On s'intéresse à deux personnes A et B qui ont les numéros 1 et 2. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au rang attribué à A (resp. B) et on pose $Z = | X - Y |$. Ainsi, pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \omega(1)$ et $Y(\omega) = \omega(2)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer $cov(X, Y)$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de Z et sa moyenne m.

Exercice 2 La loi du couple (X, Y) est définie par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
1	2/48	6/48	3/48	1/48
2	4/48	10/48	6/48	2/48
3	1/48	8/48	2/48	a/48

1. Donner la valeur de a.
2. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X = 2$.
3. Calculer la fonction génératrice g de Y.
4. On pose $Z = XY$. Calculer $\mathbb{E}Z$ et la probabilité que Z soit impaire.
5. Calculer $p = P\{Z \geq 3\}$ et comparer p avec le majorant fourni par l'inégalité de Markov.

Exercice 3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$ et $Z = X + Y$.

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que $P\{Z = n\} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$.
2. Soit $n \geq 2$. Calculer la quantité $h(n) = P\{X = 1 \mid Z = n\}$.
3. A l'aide de la formule des probabilités totales, calculer $\sum_{n=2}^{\infty} h(n)P\{Z = n\}$.
   En déduire $\mathbb{E}[1/(Z-1)]$

Exercice 4 On note X le nombre de faces obtenues en lançant Z fois de manière identique et indépendante une pièce équilibrée. Le nombre de lancers Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Par exemple, lorsque $Z = 7$, X est le nombre de faces en 7 lancers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sans faire de calcul, identifier la loi de X sachant $Z = n$.
2. En déduire $\mathbb{E}[X \mid Z = n]$ puis $\mathbb{E}[X \mid Z]$ en tant que fonction simple de Z.
3. On suppose que $Z = Y + 1$, où $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}X$ à l'aide du résultat de la question précédente.
   (b) Donner un majorant de $P\{| Y - \lambda | \geq 2\lambda\}$.