

Examen du 30 juin 2005

Durée : 1h 30

*Les documents, les calculatrices et
les téléphones portables sont interdits*

Exercice 1 Un point est choisi au hasard dans le carré $[0, 1]^2$. Quelle est la probabilité que ce point soit à l'extérieur du disque de rayon $1/2$ et de centre $(0, 0)$ sachant qu'il est à l'intérieur du disque de rayon 1 et de centre $(0, 0)$?

Exercice 2 On considère 3 urnes numérotées de 1 à 3. L'urne numéro k contient 3 boules noires et k boules blanches. On choisit au hasard une urne, puis, dans cette urne, on choisit au hasard une boule. Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?

Exercice 3 Un lot de 5 articles contient 2 articles défectueux. On tire au hasard et sans remise les 5 articles l'un après l'autre. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage du dernier article défectueux.

1. Calculer la loi de X .

(Indication : On a $P\{X = k\} = \frac{k-1}{10}$ pour des valeurs de k que l'on précisera.)

2. Calculer la fonction de répartition F de X .

3. Calculer la moyenne m et la variance σ^2 de X .

Exercice 4 Soit a, b et c trois réels *strictement* positifs. La loi du couple (X, Y) est définie par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	a	2a	3a
0	ab	2ab	3ab
1	ac	2ac	3ac

1. Montrer que a, b et c doivent vérifier une relation que l'on précisera.

Cette relation sera supposée satisfaite dans tout le reste de l'exercice.

2. Calculer la loi de Y en remarquant qu'elle est indépendante de a, b et c .

3. Montrer que X et Y sont indépendantes. Que vaut $cov(X, Y)$?

4. On prend $b = 2$ et $c = 1$. Montrer que X^2 et Y^2 sont indépendantes et identifier leurs lois.