

**L2, Math.IV, 2004-2005**  
**Partiel du Vendredi 15 Avril, de 14h.15 à 15h.45**

**Deux exercices sur une feuille recto**  
**Documents et téléphones interdits**

On rappelle que, si  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $\text{Arccos}(u)$  désigne l'angle compris entre 0 et  $\pi$  dont le cosinus vaut  $u$ .

**A1.** Dessiner le domaine  $D$  du plan réel ainsi défini :  $D = \{(x,y) / 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \cos(x)\}$

**A2.** Ecrire les deux expressions de l'intégrale double  $I = \iint_D x \cdot dx \cdot dy$  données par le Théorème de Fubini.

**A3.** Calculer  $I$  ; en déduire la valeur de  $J = \int_0^1 (\text{Arccos}(u))^2 \cdot du$

La fonction-exponentielle est notée indifféremment  $e^x$  ou  $\exp(x)$  ; on rappelle que, pour  $t > 0$ ,  $t^x = \exp(x \cdot \ln(t))$ .

**B1.** Si  $t > 1$  est fixé, quelle sont les limites de  $t^x$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et quand  $x$  tend vers 0 ?

**B2.** Si  $t > 1$  et  $0 < x < y$ , comparer  $t^x$  et  $t^y$ .

**B3.** Montrer que la fonction  $\exp(-t)$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et sur  $]1, +\infty[$  ; que vaut son intégrale  $\int_1^{+\infty} \exp(-t) \cdot dt$  ?

**B4.** Montrer que, pour  $x \geq 1$ , l'expression  $F(x) = \int_1^{+\infty} \exp(-t^x) \cdot dt$  définit une fonction continue de  $x$ .

**B5.** On considère une suite croissante  $a_n$  de nombres réels qui tend vers  $+\infty$  ; quelle est la limite de la suite  $F(a_n)$  ?

**B6.** Quelle est la limite de  $F(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**B7.** Montrer que,  $\varepsilon > 0$  étant fixé, la fonction  $\exp(-t^\varepsilon)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  (on pourra la comparer à la fonction  $1/t^2$ ) ; montrer que l'expression  $F(x) = \int_1^{+\infty} \exp(-t^x) \cdot dt$  définit une fonction continue de  $x$  sur  $]0, +\infty[$ .

**B8.** En appliquant le Théorème de convergence monotone, trouver la limite de  $F(x)$  quand  $x$  tend vers  $0^+$ .

**B9.** On pose, pour  $x > 0$ ,  $G(x) = \int_1^{1+x} \exp(-t^x).dt$  ; calculer la dérivée  $G'(x)$  de  $G(x)$  .

**B10.** Quelle est la limite de  $G(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ?

**B11.** Quelles sont les limites de  $G(x)$  et de  $G'(x)$  quand  $x$  tend vers  $0$  ?