Université Claude Bernard Lyon I

Licence “Mathématiques et informatique”

Première année

Unité d'enseignement Math I

Epreuve de mathématiques

Contrôle continu

2 Décembre 2004 – durée : 1 heures 30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1 Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit sur l'ensemble E une relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 2 Soit E un ensemble fini et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On considère l'application $\Phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $\Phi(A) = E - A$.
1) Montrer que $\Phi \circ \Phi$ est l'identité de $\mathcal{P}(E)$.
2) En déduire que Φ est bijective.
3) On suppose que le cardinal de E, c'est à dire son nombre d'éléments, est impair. Montrer que E possède autant de sous-ensembles de cardinal pair que de sous-ensembles de cardinal impair.

Exercice 3 Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Donner une condition sur b pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer a et b tels que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas, calculer $g'(0)$.

Exercice 4 Soit p un entier, $p \geq 2$.
1) Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel c dans l'intervalle $]0, 1[$ tel que

$$\ln(\ln(p + 1)) - \ln(\ln(p)) = \frac{1}{(p + c)\ln(p + c)}.$$

2) En déduire l'inégalité :

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) < \frac{1}{p\ln(p)}.$$

3) QUESTION BONUS : Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{3\ln(3)} + \ldots + \frac{1}{n\ln(n)}) = +\infty$.

Exercice 5

QUESTION DE COURS : Donner la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 3 de la fonction $\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[1,2]$.