Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Première année

Unité d'enseignement Math I

Epreuve de mathématiques

Session de JANVIER 2005

5 janvier 2005 – durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée.

La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1

1. Montrer que la fonction f définie pour tout x de son domaine de définition par $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$ est équivalente à la fonction g définie par $g(x) = x$ au voisinage de 0.

   On pourra soit utiliser les propriétés des équivalents, soit faire un développement limité.

2. En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}.$$

Exercice 2

1. Donner un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$.
3. Calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x \cos x}.$$
.
4. Calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{f(x)}$$
pour une fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = c \neq 0$.

Exercice 3

1. Calculer le PGCD de 588 et 273.

2. Déterminer un couple $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

$$588u + 273v = 42.$$

3. Existe-t-il un couple $(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $588u + 273v = 7$?

Exercice 4 Soit $(G, \cdot)$ un groupe commutatif. Soient a et b deux éléments de G d'ordre respectif n et m. On notera e l'élément neutre de G.

1. Calculer $(a \cdot b)^{nm}$.
2. Montrer que l'ordre de $a \cdot b$ divise nm *(on effectuera une division euclidienne)*.
3. Soit H l'ensemble constitué des éléments d'ordre fini de G. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 5

1. Soient $(G, *)$ et $(H, \top)$ deux groupes. Donner la définition d'un morphisme de groupes de G vers H.
2. Donner la table de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et en déduire l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ inversibles pour la multiplication.