L1, Math.I, 2004-2005
Examen du Lundi 30 mai, de 13h. à 15h.

Trois exercices sur une feuille recto ; documents interdits

A1. Quels sont les développements limités en 0, à l'ordre quatre, des fonctions $(1-u)^{-1}$, $(1+u)^{-1}$, $\ln(1-u)$, $\ln(1+u)$ et $\ln[(1+u)/(1-u)]$?
A2. Quel est le développement limité en 0, à l'ordre quatre, de $f(x) = \ln[(1+\sin(x)) / (1-\sin(x))]$?
A3. Quel est le signe de $f(x) - 2x$ pour les petites valeurs positives de x ?

Si n est un entier positif ou nul, on note $n.Z$ l'ensemble des entiers relatifs divisibles par n, soit encore l'ensemble des entiers relatifs multiples de n.
B1. Déterminer $0.Z$ et $1.Z$.
B2. Trouver x dans $2.Z$ et y dans $3.Z$ tels que $x + y = 1$; en déduire que tout nombre entier relatif est somme d'un nombre (entier relatif) pair et d'un multiple de trois.
B3. Soient a et b deux entiers relatifs quelconques ; montrer que l'équation $2u + a = 3v + b$ a des solutions (u,v) dans $Z\times Z$; en déduire qu'il existe un entier x congru à a modulo 2 et congru à b modulo 3.
B4. Soient p et q deux nombres premiers distincts ; montrer, grâce au théorème de Bezout, que tout entier relatif est somme d'un multiple de p et d'un multiple de q.
B5. Montrer que, pour chaque n positif, $n.Z$ est un sous-groupe du groupe additif $(Z,+)$ des entiers relatifs.
B6. A quelle condition $n.Z$ est-il inclus dans $m.Z$?
B7. Montrer que $n.Z \cap m.Z$ est de la forme $f(n,m).Z$, où $f(n,m)$ est un entier positif qu'on déterminera.

C1. On considère une fonction f de R dans R dérivable en tout point réel a ; si $h \neq 0$, que déclare le Théorème des accroissements finis à propos de $(f(a+h) - f(a)) / h$?
C2. Montrer que, si $f'(x)$ tend vers une limite lorsque x tend vers a^-, cette limite vaut $f'(a)$; même question lorsque x tend vers a^+.
C3. Soit g une fonction croissante de R dans R ; étant donné un réel a, on note m la borne supérieure des $g(x)$ pour $x < a$, et M la borne inférieure des

$g(y)$ pour $y > a$; montrer que $m \leq g(a) \leq M$. On admettra que $g(x)$ tend vers m lorsque x tend vers a^- , et que $g(y)$ tend vers M lorsque y tend vers a^+ .

C4. Montrer que si la dérivée f' de f est croissante, cette dérivée est continue.