

# L1, Math.I, 2004-2005

## Examen du 29-06-2005, de 8h. à 9h.30

### Trois exercices sur une feuille recto

### Documents et téléphones interdits

- A1.** Quel est le développement limité en  $0$ , à l'ordre trois, de  $1 / (1 + x^2)$  ?
- A2.** Quel est le développement limité en  $0$ , à l'ordre quatre, de  $\arctan(x)$  ?
- A3.** Quel est le développement limité en  $0$ , à l'ordre quatre, de  $f(x) = \cos(\arctan(x))$  ?
- A4.** On rappelle que  $f^{(n)}(x)$  désigne la  $n^{\circ}$  dérivée de la fonction  $f(x)$ . Quelle est la valeur de  $f^{(4)}(0)$  ?
- A5.** Quelle est la valeur de  $f^{(5)}(0)$  ?

On considère un entier  $n$  supérieur ou égal à  $3$ .

- B1.** Montrer que, quel que soit l'entier  $x$ , les carrés des nombres  $x$  et  $n - x$  sont congrus modulo  $n$ .
- B2.** On note  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  des restes modulo  $n$ , et  $c$  l'application de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  qui à un reste modulo  $n$  associe son carré. Cette application  $c$  est-elle injective ? Est-elle surjective ?
- B3.** Dresser la table des carrés modulo  $7$ .
- B4.** Montrer que l'équation  $x^2 - 6xy + 2y^2 = 7003$  n'a pas de solutions  $(x, y)$  entières (Exprimer le premier membre comme un carré modulo  $7$ ).

- C1.** Énoncer le Théorème des accroissements finis.
- C2.** Montrer que, pour tous  $x$  et  $y$  réels,  $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$ .
- C3.** Montrer que, si  $0 < y < x$ ,  $0 < \arctan(1/y) - \arctan(1/x) < x - y$ .
- C4.** Montrer que, si  $0 < x$ , alors  $\pi/2 \leq x + \arctan(1/x)$ .