

L1, Math.I, 2004-2005

Examen du 29-06-2005, de 8h. à 9h.30

Trois exercices sur une feuille recto

Documents et téléphones interdits

- A1.** Quel est le développement limité en 0 , à l'ordre trois, de $1 / (1 + x^2)$?
- A2.** Quel est le développement limité en 0 , à l'ordre quatre, de $\arctan(x)$?
- A3.** Quel est le développement limité en 0 , à l'ordre quatre, de $f(x) = \cos(\arctan(x))$?
- A4.** On rappelle que $f^{(n)}(x)$ désigne la n° dérivée de la fonction $f(x)$. Quelle est la valeur de $f^{(4)}(0)$?
- A5.** Quelle est la valeur de $f^{(5)}(0)$?

On considère un entier n supérieur ou égal à 3 .

- B1.** Montrer que, quel que soit l'entier x , les carrés des nombres x et $n - x$ sont congrus modulo n .
- B2.** On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$ des restes modulo n , et c l'application de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui à un reste modulo n associe son carré. Cette application c est-elle injective ? Est-elle surjective ?
- B3.** Dresser la table des carrés modulo 7 .
- B4.** Montrer que l'équation $x^2 - 6xy + 2y^2 = 7003$ n'a pas de solutions (x, y) entières (Exprimer le premier membre comme un carré modulo 7).

- C1.** Énoncer le Théorème des accroissements finis.
- C2.** Montrer que, pour tous x et y réels, $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$.
- C3.** Montrer que, si $0 < y < x$, $0 < \arctan(1/y) - \arctan(1/x) < x - y$.
- C4.** Montrer que, si $0 < x$, alors $\pi/2 \leq x + \arctan(1/x)$.