

Université Claude Bernard Lyon I
Licence “Sciences et technologie”
Unité d’enseignement “Techniques mathématiques de base (groupe 1)”

Épreuve de contrôle continu

jeudi 25 novembre 2004 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l’ordre de votre choix. L’utilisation de documents de toute nature et de calculatrices n’est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

Résoudre l’équation suivante, d’inconnue complexe z :

$$9 - z^2 = 3z + 7i.$$

On pourra utiliser l’une ou l’autre des informations suivantes : $(45)^2 = 2025$; $(46)^2 = 2116$; $(47)^2 = 2209$; $(48)^2 = 2304$; $(49)^2 = 2401$; $(51)^2 = 2601$; $(52)^2 = 2704$; $(53)^2 = 2809$; $(54)^2 = 2916$; $(55)^2 = 3025$.

Exercice 2

Déterminer toutes les racines sixièmes du nombre complexe $\frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$.

Exercice 3

Soit f la fonction d’une variable réelle définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} x$$

- 1) Préciser l’ensemble de définition de f .
- 2) Calculer la dérivée de f sur un ensemble (à préciser) où cela peut s’effectuer sans difficulté.
- 3) Montrer que pour tout x où f est définie, on a :

$$f(x) = \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{4}.$$

(TSVP)

Exercice 4

1) Décomposer en éléments simples la fonction rationnelle :

$$F(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$$

2) Quelles sont les primitives de F sur $] - \infty, 1[$?

3) On note G la fonction de $]0, \pi[$ vers \mathbf{R} définie pour tout t de $]0, \pi[$ par :

$$G(t) = \frac{2 \sin(2t)}{(\cos^2(2t) + 1)(\cos(2t) - 1)}.$$

A l'aide d'un changement de variables, déterminer les primitives de G .

Exercice 5

Soit $a > 0$ un réel fixé. Calculer

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$$