Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Techniques mathématiques de base (groupe 1)"

(Semestre 1)

Examen terminal (première session)

mardi 4 janvier 2005 - Durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions y d'une variable réelle notée t et à valeurs réelles, deux fois dérivables, solutions de :

$$2y'' + 2y' + y = te^{-t}$$

Exercice 2

Rédiger une démonstration du résultat suivant, énoncé dans le cours :

Pour $n \geq 0$ entier, E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ et u application linéaire de E vers F :

$$(\operatorname{Ker} u = \{0\}) \Rightarrow (u \text{ est injective}).$$

Exercice 3

On considère les huit vecteurs suivants de $\mathbf{R}^4$:

$$u_1 = (1, 1, 2, -1),\ u_2 = (-1, 0, -1, 2),\ u_3 = (1, 3, 4, 1),\ u_4 = (-1, 2, 1, 4) \text{ et } u_5 = (1, 4, 5, 2)$$

$$v_1 = (0, 1, 1, 0),\ v_2 = (0, 1, 0, 1) \text{ et } v_3 = (0, 0, 1, 1).$$

Soit E le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 ; soit F le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2 et v_3.

1) Déterminer la dimension de F.

2) Montrer que $\dim E \geq 2$.

3) Montrer que u_1 n'appartient pas à F.

4) En déduire la dimension de $E + F$. Déterminer le sous-espace $E + F$.

5) Déterminer $E \cap F$ et en déduire la dimension de E.

Exercice 4

Dans cet exercice, toutes les fonctions considérées sont des fonctions d'une variable notée t, variant dans $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

(TSVP)

1) On note (E_0) l'équation différentielle :

$$y' - 2ty = 0 \qquad (E_0)$$

Déterminer toutes les fonctions dérivables solutions de (E_0).

2) Pour chaque réel α on note (F_α) l'équation différentielle :

$$y' + \frac{y}{t} = \alpha e^{t^2}.$$

a) Déterminer toutes les fonctions dérivables (définies sur $\mathbf{R}^{+*}$) solutions de (F_0).

b) Déterminer une fonction dérivable (définie sur $\mathbf{R}^{+*}$) solution de (F_1).

c) Soit α un réel. Déduire des questions a) et b) toutes les fonctions dérivables (définies sur $\mathbf{R}^{+*}$) solutions de (F_α).

3) On note enfin (E) l'équation différentielle :

$$y'' + \left(\frac{1-2t^2}{t}\right) y' - \left(\frac{1+2t^2}{t^2}\right) y = 0 \qquad (E)$$

(il n'est **pas** demandé de résoudre cette équation).
Montrer que si f est une fonction deux fois dérivable (définie sur $\mathbf{R}^{+*}$) solution de (E), alors la fonction g définie pour tout $t \in \mathbf{R}^{+*}$ par :

$$g(t) = f'(t) + \frac{f(t)}{t}$$

est une fonction dérivable solution de (E_0).

4) Déduire de ce qui précède que si f est une fonction deux fois dérivable (définie sur $\mathbf{R}^{+*}$) solution de (E), alors il existe un α réel tel que f soit solution de (F_α).

Exercice 5

1) Soit u et v deux réels tels que $u \in]-1,1[$ et $v \in]-1,1[$.

a) Montrer que $0 < 1 + uv$.

b) Montrer que $-1 < \dfrac{u+v}{1+uv} < 1$.

2) Soit a un réel fixé avec $a \in]-1,1[$. On considère les deux fonctions f et g définies sur $]-1,1[$ par :

$$f(t) = \operatorname{Argth} a + \operatorname{Argth} t \qquad \text{et} \qquad g(t) = \operatorname{Argth}\left(\frac{a+t}{1+at}\right).$$

Calculer les fonctions dérivées f' et g'.

3) Montrer que pour tous réels a et b tels que $a \in]-1,1[$ et $b \in]-1,1[$,

$$\operatorname{Argth} a + \operatorname{Argth} b = \operatorname{Argth}\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$