Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Techniques mathématiques de base (groupe 1)"

Examen terminal (deuxième session)

Fin juin ou début juillet 2005 - Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso).

Exercice 1

Soit $u\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une base du noyau $\operatorname{Ker} u$.

2) Déterminer une base de l'image $\operatorname{Im} u$.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $\epsilon_1 = (1,1,-1)$, $\epsilon_2 = (-1,0,1)$ et $\epsilon_3 = (-2,1,1)$.

3) Montrer que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

4) Calculer $u(\epsilon_2)$ et $u(\epsilon_3)$.

5) Ecrire la matrice B de u dans la base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$.

6) Calculer B^2 et en déduire la dimension de $\operatorname{Ker} u^2$.

Exercice 2

Soit v une application linéaire de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^3$. Montrer que v n'est pas injective.

Exercice 3

1) Résoudre sur $\mathbf{R}^{+*}$ l'équation différentielle suivante, d'inconnue y dérivable, la variable étant notée x :

$$xy' + 2y = 0.$$

2) Calculer sur $\mathbf{R}$ la primitive $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

3) Résoudre sur $\mathbf{R}^{+*}$ l'équation différentielle suivante, d'inconnue y dérivable, la variable étant notée x :

$$xy' + 2y = \frac{1}{1+x^2}.$$

(TSVP)

Exercice 4
Préciser le domaine de définition et calculer la dérivée de la fonction définie par

$$f(t) = \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\, t).$$

Exercice 5
1) On note $j = e^{2i\pi/3}$. Que vaut $j + j^2$?
2) On note $\omega = e^{2i\pi/7}$.
  a) Que vaut $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$?
  b) Que vaut $\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 + \omega^{10} + \omega^{12}$?