Université Claude-Bernard Lyon 1

EXAMEN FINAL
TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE
LICENCE 1ère ANNÉE

Mardi 31 mai 2005. Durée de l'épreuve : 2h

Il est interdit d'utiliser des calculatrices.
Il est admis de consulter le polycopié ou des notes personelles.

Exercice 1 (Étude de fonction). Étudier la fonction

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

et dessiner son graphe, en suivant les étapes ci-dessous :

1. Trouver le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers les bornes du domaine de f.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer les points de minimum et/ou maximum locaux et calculer la valeur de f correspondante.

Exercice 2 (Calcul d'intégrale). Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{5\mathrm{ch}x + 3\mathrm{sh}x + 4}dx$$

en utilisant le changement de variable $t = e^x$.

Exercice 3 (Équation différentielle du 2ème ordre). Trouver l'unique solution y de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = -e^{2x}$$

qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 4 (Équation différentielle du 1er ordre).

1) Trouver la primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x(2-x)}$ sur l'intervalle $]0, 2[$.

2) Résoudre l'équation différentielle homogène

$$(E_0) \qquad x(2-x)y'(x) + (1-x)y(x) = 0$$

sur l'intervalle $]0, 2[$.

3) Calculer la dérivée de la fonction $g(x) = \arccos(x-1)$ sur l'intervalle $]0, 2[$.

4) Résoudre l'équation différentielle inhomogène

$$(E) \qquad x(2-x)y'(x) + (1-x)y(x) = x(2-x)$$

sur l'intervalle $]0, 2[$.