Université Claude-Bernard Lyon 1

EXAMEN DE RATTRAPAGE
TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE
LICENCE 1ère ANNÉE

Lundi 27 juin 2005. Durée de l'épreuve : 1h30

Il est interdit d'utiliser des calculatrices.
Il est admis de consulter le polycopié ou des notes personelles.

Exercice 1 (Fonctions circulaires réciproques). Pour tout $x \in \mathbf{R}$, soit

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right).$$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 1$.

2) Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

3) Démontrer que pour tout $x > 1$ on a

$$f(x) = -\arctan x + \frac{3\pi}{4},$$

en utilisant eventuellement 1) et 2).

Exercice 2 (Calcul d'intégrale). Calculer l'intégrale

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

en utilisant eventuellement le changement de variable $x = r\sin t$.

Exercice 3 (Équation différentielle du 2ème ordre). Trouver l'unique solution y de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 6x - 13$$

qui vérifie $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 4 (Équation différentielle du 1er ordre).

1) Trouver une primitive $A(x)$ de la fonction $a(x) = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$ sur l'intervalle $]0,\infty[$.

2) Résoudre l'équation différentielle homogène

$$(E_0) \qquad x(x^2+1)y'(x) - (x^2-1)y(x) = 0$$

sur l'intervalle $]0,\infty[$.

3) Résoudre l'équation différentielle inhomogène

$$(E) \qquad x(x^2+1)y'(x) - (x^2-1)y(x) = -2x$$

sur l'intervalle $]0,\infty[$.