Partiel de Topologie

Question de cours. Énoncer et montrer le résultat qui affirme qu'une limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue.

Exercice 1. Décider si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ sont fermées : $[0,1[$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^2$, $[0,1]\times[1,2]$. On justifiera les réponses.

Exercice 2. On rappelle que $\ell^\infty = \{(x_n)\subset\mathbb{R}; (x_n) \text{ bornée}\}$ et que la norme usuelle sur ℓ^∞ est $\|(x_n)\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
a) Montrer que si (x_n) converge dans $\mathbb{R}$, alors $(x_n)\in\ell^\infty$. En déduire que $\mathbf{c} = \{(x_n)\subset\mathbb{R}; (x_n) \text{ converge}\}$ est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞.
b) Montrer que si (x_n) converge dans $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
c) Montrer que $T : \mathbf{c}\to\mathbb{R}$, $T(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, est une forme linéaire et continue ; ici, $\mathbf{c}$ est muni de $\|\ \|_\infty$, $\mathbb{R}$ est muni de la norme usuelle. Calculer $\|T\|$.

Problème. Soit (X,d) un espace métrique **complet**.
A. On considère une suite $(\overline{B}(x_n,r_n))$ de boules fermées de X telle que $r_n\to 0+$, $\overline{B}(x_{n+1},r_{n+1})\subset\overline{B}(x_n,r_n)$, $n\in\mathbb{N}$.
a) Montrer que la suite (x_n) est de Cauchy.
b) Soit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Montrer que $x\in\overline{B}(x_n,r_n)$, $n\in\mathbb{N}$.

B. Soit F un fermé de X.
a) Si $x\in X\setminus F$, montrer qu'il existe un $r>0$ tel que $\overline{B}(x,r)\cap F=\emptyset$.
b) Si $x\in X\setminus F$ et $\varepsilon>0$, montrer qu'il existe un $r>0$ tel que $r<\varepsilon$ et $\overline{B}(x,r)\cap F=\emptyset$.
c) On se donne $x\in X$, $\varepsilon>0$ et $r>0$ tels que $B(x,r)\not\subset F$. Montrer qu'il existe $y\in X$ et $\rho>0$ tels que : $\rho<\varepsilon$, $\overline{B}(y,\rho)\cap F=\emptyset$ et $\overline{B}(y,\rho)\subset\overline{B}(x,r)$.

C. On considère une suite (F_n) de fermés de X telle que $\overset{\circ}{F}_n=\emptyset$, $n\in\mathbb{N}$.
a) Construire par récurrence une suite $(x_n)\subset X$ et une suite (r_n) de nombres strictement positifs telles que : $\overline{B}(x_{n+1},r_{n+1})\subset\overline{B}(x_n,r_n)$, $r_n<1/2^n$, $\overline{B}(x_n,r_n)\cap F_n=\emptyset$, $n\in\mathbb{N}$. (Indication : montrer d'abord que $F_0\neq X$.)
b) Si $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, montrer que $x\notin\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
c) En déduire le résultat suivant : si $X=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, avec F_n fermé, $n\in\mathbb{N}$, alors il existe un n_0 tel que $\overset{\circ}{F}_{n_0}\neq\emptyset$.

D. Soit $f : [0,\infty[\to\mathbb{R}$ **continue** telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx)=0$, $x\ge 0$. On se propose de montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, ce qui revient à : pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $M>0$ tel que $|f(x)|\le\varepsilon$ si $x>M$. On fixe un $\varepsilon>0$.
a) Soit $F_n=\{x\ge 0\ ;\ |f(mx)|\le\varepsilon \text{ si } m\ge n\}$. Montrer que F_n est un fermé de $[0,\infty[$.
b) Montrer que, pour tout $x\ge 0$, il existe un n_0 tel que $x\in F_{n_0}$. En déduire que $[0,\infty[=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
c) Montrer qu'il existe $a,b>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $a<b$ et $]a,b[\subset F_{n_0}$.
d) Montrer que $x\in F_n \Longrightarrow lx\in F_n$, $l=1,2,\ldots$ En déduire que $]la,lb[\subset F_{n_0}$, $l=1,2,\ldots$
e) Soit $m=E\left(\dfrac{a}{b-a}\right)+1$ (donc $m\in\mathbb{N}^*$ et $m>\dfrac{a}{b-a}$). Montrer que, si $l\ge m$, alors $]la,lb[\cap](l+1)a,(l+1)b[\neq\emptyset$, puis que $\bigcup\limits_{l\ge m}]la,lb[=]ma,\infty[$.
f) Conclure.