Examen de Topologie
le 11 janvier 2005

Question de cours. Soient (K,d) un espace compact, (X,D) un espace métrique et $f : K \to X$. Si f est **continue** et **bijective**, montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 1. Soient $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$.
a) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $f(x) > f(0)$ si $\|x\| > R$.
b) En déduire que $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \inf\limits_{\|x\| \leq R} f(x)$.
c) Montrer qu'il existe un x_0 tel que $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soient $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $\|g(x) - g(y)\| \leq 1/2\|x - y\|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par la formule $f(x) = x - g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
a) Montrer que $1/2\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq 3/2\|x - y\|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.
b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il y a exactement un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = z$.
c) En déduire que f est un homéomorphisme.

Problème 1. Soit $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \ ; \ a_1 + \ldots a_n = l} c_{a_1, \ldots, a_n} x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}.$$

Ici, $l \in \mathbb{N}^*$ est **fixé** et la somme se fait sur tous les entiers $a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_1 + \ldots + a_n = l$. Un exemple de tel P si $n = 3$, $l = 4$: $P(x, y, z) = \alpha x^4 + \beta x y^2 z + \gamma y^2 z^2 + \delta x z^3$.
a) Montrer que P est continue.
b) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, calculer $P(tx)$ en fonction de $P(x)$.
Dans la suite, on suppose que $n \geq 2$.

c) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe.
d) Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_2 = 1\}$. Montrer que S est compact.
e) En considérant l'application $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S$, $h(x) = \dfrac{1}{\|x\|_2}x$, montrer que S est connexe.
f) Déduire des questions d) et e) qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(S) = [a, b]$.
g) Montrer que $a\|x\|_2^l \leq P(x) \leq b\|x\|_2^l$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
h) On suppose que $P(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que P est de signe constant sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En déduire que l est pair.

Problème 2. Soit $n \geq 2$. On se propose de montrer que $B = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_2 < 1\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ 1/2 < \|x\|_2 < 2\}$ ne sont pas homéomorphes. On suppose, par l'absurde, qu'il existe un homéomorphisme $f : B \to C$.
a) Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = \|x\|_2$. Rappeler pourquoi g est continue.
b) Soit $K \subset C$ un ensemble compact. Montrer qu'il existe $a, b \in]1/2, 2[$ tels que $a \leq \|x\|_2 \leq b$, $\forall\, x \in K$.
c) Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_2 = 1\}$. Si $K \subset C$ un ensemble compact et si $S \subset K$, montrer que $g(C \setminus K)$ n'est pas un intervalle. En déduire que $C \setminus K$ n'est pas connexe.
d) Soit $L = f^{-1}(S)$. Montrer que $L \subset B$ est un compact. En déduire qu'il existe $r \in [0, 1[$ tel que $L \subset M$, où $M = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_2 \leq r\}$.
e) Montrer que $B \setminus M$ est connexe. (Indication : $B \setminus M = h(]r, 1[\times S)$, où $h(t, y) = ty$.)
f) Soit $K = f(M)$. Montrer, à l'aide de la question c), que $C \setminus K$ n'est pas connexe.
g) Montrer que $f(B \setminus M) = C \setminus K$. Aboutir à une contradiction. Conclure.