Examen de Topologie

Le Jeudi 7 juillet de 8 heures à 11 heures

Question de cours. Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer que $A \subset X$ est compact si et seulement si A est fermé dans X.

Exercice 1. Soit $l^\infty = \{(x_n) \subset \mathbb{R} \; ; \; (x_n) \text{ bornée}\}$, muni de la norme $\|(x_n)\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

On considère l'application $T : l^\infty \to \mathbb{R}$, $T(x_n) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$.

a) Montrer que T est bien définie, c'est-à-dire que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$ est convergente.

b) Montrer que T est linéaire.

c) Montrer que $|T(x_n)| \leq 2\|(x_n)\|$. Que peut-on dire alors de $\|T\|$?

d) Montrer que $\|T\| = 2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$.

a) Montrer que, pour tout $a > 0$, l'ensemble $K_a = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; f(x) \geq a\}$ est compact.

b) Montrer que, s'il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) > 0$, alors f a un point de maximum, c'est-à-dire il existe un x_0 tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que la conclusion du point **b)** reste valide si on suppose qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = 0$.

d) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$, mais n'ayant pas de point de maximum.

Exercice 3. Soient (X, d) un espace métrique et $L \subset X$ un compact non vide.

a) Montrer que pour tout $x \in X$ il existe un $y \in L$ tel que $\operatorname{dist}(x, L) = d(x, y)$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, soit $L_\varepsilon = \{x \in X \; ; \; \mathrm{dist}(x, L) \leq \varepsilon\}$. Montrer que L_ε est fermé.

c) En utilisant la question **a)**, montrer que $L_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{y \in L} \overline{B}(y, \varepsilon)$.

d) En considérant le cas particulier où X est un espace normé, montrer que L_ε n'est pas forcément un compact.

e) On suppose (uniquement dans cette question) X compact. Montrer que L_ε est compact.

f) Montrer que L_ε est borné. Que peut-on en déduire si X est un espace normé de dimension finie ?

g) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} L_{1/n} = L$.

Dans les questions suivantes, on suppose X espace normé.

h) Si L est connexe, montrer que L_ε est connexe.

i) Si L est connexe par arcs, montrer que L_ε est connexe par arcs.

j) Si L est convexe, montrer que L_ε est convexe.