Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques III-1 (Analyse)" (groupe 1)

Examen terminal (première session)

lundi 9 janvier 2006 - Durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso). Il est accompagné d'un document imprimé sur une seule page rappelant des définitions et formules relatives aux séries de Fourier.

Exercice 1

Pour tout $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$

1) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbf{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.

2) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbf{R}^+$?

3) La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) $\sum \sqrt{n!} z^n$.

2) $\sum (5^n + (-5)^n) z^n$.

Exercice 3

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Pour les z complexes où cette somme existe, on note

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n.$$

Dans tout l'exercice on suppose que le rayon de convergence de la série entière $g(z)$ est égal à 3.

Enfin pour $t \in \mathbf{R}$ on pose $f(t) = g(e^{it})$.

1) Montrer qu'il existe un $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|\alpha_n| \leq \frac{1}{2^n}$. (Il est recommandé de considérer la série qui définit $g(z)$ en $z = 2$).

2) Montrer que la fonction f est une fonction continue et 2π-périodique de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$.

(TSVP)

3) a) Déterminer la série de Fourier de f sous forme complexe, puis sous forme trigonométrique.

b) Montrer que si g ne prend que des valeurs réelles dans le disque $\{z \mid |z| < 3\}$, alors g est constante. (On pourra centrer son attention sur les coefficients de Fourier de la fonction f).

4) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

Exercice 4

1) Soit f et g deux fonctions 2π- périodiques et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$. Montrer que si f et g ont la même série de Fourier, alors $f = g$.

Dans toute la suite de l'exercice, on se propose de rechercher les fonctions y de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ qui sont 2π-périodiques, dérivables, et vérifient l'équation fonctionnelle :

$$(E) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad y'(t) + y(t - \frac{\pi}{2}) - y(t - \pi) = \cos t.$$

2) Soit y une solution de (E).

a) Montrer que y' est elle-même dérivable.

b) Montrer que y' est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3) Dans cette question, on utilisera des séries de Fourier sous forme complexe. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. On note $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{int}$ la série de Fourier de y.

a) Quelle est la série de Fourier de y' ?

b) Quelle est la série de Fourier de $y \mapsto y(t - \frac{\pi}{2})$?

c) Quelle est la série de Fourier de $y \mapsto y(t - \pi)$?

d) En déduire la série de Fourier de $t \mapsto y'(t) + y(t - \frac{\pi}{2}) - y(t - \pi)$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$,

$$in + (-i)^n - (-1)^n \neq 0.$$

5) Déterminer toutes les solutions 2π-périodiques et dérivables de (E).

On rappelle ci-dessous quelques définitions et formules concernant les séries trigonométriques, dont certaines pourront être utiles pour les exercices 3 et 4 :

Soit f une fonction continue par morceaux et 2π-périodique. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} \, ds$$

pour $0 < n$, on pose :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cos(ns) \, ds \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \sin(ns) \, ds$$

et on ajoute la définition spécifique de :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \, ds \text{ (b_0 n'est pas défini).}$$

Les coefficients $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$ sont appelés les **coefficients de Fourier** de f.
La **série de Fourier** de f sera par définition la série :

$$a_0(f) + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{int}.$$

Les coefficients $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$ sont liés par les relations suivantes :
Pour $0 < n$,

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f),$$

$$b_n(f) = ic_n(f) - ic_{-n}(f),$$

$$c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \text{ et}$$

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}.$$

qu'on complète pour $n = 0$ par :

$$a_0(f) = c_0(f) \text{ tandis que } b_0(f) \text{ n'existe pas.}$$