Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques III-1 (Analyse)" (groupe 1)

Examen partiel

mercredi 16 novembre 2005 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

Pour $n \geq 1$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3 + k + 1}.$$

1) Pour $n \geq 1$ fixé, justifier l'existence du réel R_n.

2) Pour tout $n \geq 2$, montrer que

$$R_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{t^3 + t + 1}\, dt \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^3}.$$

3) Préciser la nature de la série ΣR_n.

Exercice 2

On considère la série de fonctions Σu_n où pour $n \geq 1$, u_n est la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie pour tout x réel par :

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

1) Montrer que cette série est simplement et normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

2) On pose $S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$. Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbf{R}$ et préciser $\lim_{x \to 0} S(x)$.

3) Démontrer l'identité :

$$\int_0^{\pi} S(t)\, dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

4) Montrer que S est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ qui vérifie pour tout x réel la relation :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(TSVP)

Exercice 3

Pour $\alpha \geq 0$ et $n \geq 1$, on note $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$.

1) Pour $\alpha = 0$, la série Σu_n est-elle convergente ou divergente ?

2) Pour $\alpha = 2$, la série Σu_n est-elle convergente ou divergente ? (On pourra utiliser le critère de Cauchy).

3) Soit $\alpha \in]2, +\infty[$, la série Σu_n est-elle convergente ou divergente ?

4) Pour $\alpha = 1$, montrer que la série Σu_n est divergente.

5) Soit $\alpha \in]0, 1[$, la série Σu_n est-elle convergente ou divergente ?

AVERTISSEMENT : la question 6) ci-dessous est un peu plus difficile, et sera notée sous forme de “bonus”.

6) Dans toute cette question α est un réel fixé tel que $1 < \alpha < 2$.

a) Montrer que quand $n \to +\infty$, $u_n \sim e^{-n^{\alpha-1}}$.

b) Montrer que quand $n \to +\infty$, $e^{-n^{\alpha-1}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) La série Σu_n est-elle convergente ou divergente ?