Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Techniques mathématiques de base (groupe 1)"

(Semestre 1)

Examen terminal (première session)

mercredi 4 janvier 2006 - Durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

Calculer

$$\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\, dt$$

(on pourra effectuer le changement de variable $s = \sin t$).

Exercice 2

1) Résoudre sur $]-\infty, 1[$ l'équation différentielle (d'inconnue dérivable notée y, la variable étant notée t) :

$$(t-1)(t^2+1)y' = (t^2-2t-1)y.$$

2) Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle (d'inconnue deux fois dérivable notée y, la variable étant notée t) :

$$y'' - 10y' + 25y = e^{5t} + te^t.$$

Exercice 3

Soit u l'application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ définie pour tout (x, y) de $\mathbf{R}^2$ par :

$$u(x, y) = (4x + 3y, 9x + 7y).$$

1) Montrer que u est linéaire.

2) Montrer que u est bijective et déterminer u^{-1}.

3) Déterminer **sans calculs** les sous-espaces $\operatorname{Ker} u^{-1}$ et $\operatorname{Im} u^{-1}$.

4) Soit v l'application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ définie pour tout (x, y) de $\mathbf{R}^2$ par :

$$v(x, y) = (-y, x).$$

Montrer que $u \circ v \neq v \circ u$.

(TSVP)

Exercice 4
Dans $\mathbf{R}^4$ on considère les vecteurs

$$a = (1,0,2,0) \qquad b = (1,1,1,-2) \qquad \text{et} \qquad c = (0,0,1,1).$$

On note $F_1 = \mathrm{Vect}(a,b)$ le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par a et b, $F_2 = \mathrm{Vect}(-b,c)$ le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par $-b$ et c.

1) Déterminer la dimension de F_1 et la dimension de F_2.

2) Montrer que $c \notin F_1$.

3) Déterminer $F_1 \cap F_2$ (on en fournira une base).

4) Déterminer une représentation cartésienne de $F_1 + F_2$, et préciser sa dimension. (Dans la réponse à cette question, on notera (x,y,z,t) un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^4$).

5) F_1 et F_2 sont-ils en somme directe ?

Exercice 5

1) a) Montrer que $\mathrm{ch}\, 1 < e$.

b) Soit g la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie pour tout t réel par :

$$g(t) = \mathrm{ch}^3(t^2+1) - 27.$$

Montrer que g n'est pas de signe constant sur $\mathbf{R}$. (On rappelle à ceux qui en auraient besoin que $2 < e < 3$).

2) Dans cette question et la suivante, on considère l'équation différentielle (d'inconnue notée y dérivable de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, la variable étant notée t) :

$$(E) \qquad \left(\mathrm{ch}(t^2+1)\right)^5 \mathrm{ch}(t^2+2)\, y' + y = 27.$$

On **ne cherchera pas** à déterminer toutes les solutions de (E).
Montrer qu'il existe une fonction constante, qu'on précisera, qui est solution de (E).

3) On note f l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie pour tout t réel par :

$$f(t) = \mathrm{ch}^3(t^2+1).$$

En utilisant les deux questions précédentes et **sans plus de calculs**, montrer que f n'est **pas** solution de (E).