TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE

EXAMEN DE JANVIER 2006. DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2H

Université Claude-Bernard Lyon 1. Licence de Mathématiques. Groupe 2

L'usage des calculettes est interdit. Il sera tenu compte du soin et de la clarté de la rédaction.

1. Exercice

On considère la fonction $x \to f(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x}$.
Question 1. Indiquer le domaine de définition de f et étudier les limites de f aux bornes de ce domaine.
Question 2. Calculer $lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.
Question 3. On pose $f(0) = 0$. Montrer que la fonction f ainsi définie sur tout $\mathbb{R}$ est dérivable en tout point et calculer sa dérivée.

2. Exercice

Montrer que l'on a, pour tout $x > 0$:

$$\frac{x}{1+2x} < ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) < \frac{x}{1+x}.$$

(*Indication* : on pourra utiliser, pour une fonction à préciser, le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, 2x]$).

3. Exercice

Question 1. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{4}{1-t^4}$ en éléments simples.
Question 2. En déduire une primitive de la fonction $t \to \frac{4}{1-t^4}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$.
Question 3. Transformer l'intégrale $I = \displaystyle\int_o^{\frac{1}{3}} \frac{2dx}{\sqrt{x}(1-x^2)}$ en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$. En déduire la valeur de I.

Key words and phrases. Examen terminal de l' U.E. "Techniques Mathématiques de Base".

4. Exercice

Question 1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y' - 2y = 0$$

définies sur l'intervalle $]-1, 1[$.

Question 2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y' - 2y = x$$

définies sur l'intervalle $]-1, 1[$ (*Indication* : on pourra chercher les solutions sous la forme $y(x) = C(x)\frac{x-1}{x+1}$).

5. Exercice

Question 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y" - 4y' + 4y = 0.$$

Question 2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$y" - 4y' + 4y = cosx.$$

Question 3. Déduire de ce qui précède l'expression des solutions de l'équation différentielle

$$y" - 4y' + 4y = cosx.$$

UFR de Mathématiques, Université Claude Bernard Lyon 1, F. 69622 Villeurbanne Cedex