

CONTROLE CONTINU D'ALGEBRE

Vendredi 12 Décembre 2003

Durée 1H30

Les calculatrices et les documents sont interdits

Une large part de l'évaluation portera sur la rédaction et la justification des résultats.

Exercice 1. Soit E un ensemble. Soient A, B des parties de E .

Montrer que $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$.

Exercice 2. Soient P, R et T des propositions. Montrer :

$((P \implies T) \implies P) \implies (R \implies T)$ équivaut à $(P \text{ et } R) \implies T$.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 4. Soit E un ensemble à 41 éléments. Soit A une partie fixée de E ayant 7 éléments.

- 1) Quel est le nombre de parties de E de cardinal pair ?
- 2) Quel est le nombre de parties de E contenues dans A ?
- 3) Quel est le nombre de parties de E disjointes de A ?
- 4) Quel est le nombre de parties B de E vérifiant $|A \cap B| = 3$?

Exercice 5. Soit n entier naturel non nul.

- 1) Calculer $\sum_{k=1}^n k(k-1)C_n^k$ en fonction de n .
- 2) En déduire $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k$ en fonction de n .

Exercice 6. Soit $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 2 & 9 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

- 1) Décomposer p en produit de cycles disjoints.
- 2) Décomposer p en produit de transpositions.
- 3) Déterminer la signature de p .
- 4) Quel est l'ordre de p dans S_9 ? calculer p^{842} .

Exercice 7. Soit (G, \star) un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G .

Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G .