Université Claude Bernard – Lyon 1

Licence MASS – UE 21

Contrôle continu d'analyse

5 avril 2004 — Durée : 1 heure 30

Documents et calculettes interdits

Exercice 1

1°) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction sinus, sur l'intervalle $[0, x]$, avec un reste d'ordre 5.

2°) En déduire l'encadrement :

$$\frac{53}{162} - \frac{1}{29160} < \sin\frac{1}{3} < \frac{53}{162} + \frac{1}{29160}$$

Exercice 2

1°) Ecrire le développement limité d'ordre 3, au voisinage de 0, de $f : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$.

2°) Ecrire le développement limité d'ordre 3, au voisinage de 0, de $g : x \mapsto \sqrt{1 - x + \frac{x^2}{2}}$.

3°) Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{\mathrm{th}^2 \frac{x}{2}}$$

Exercice 3

Calculer, en utilisant les équivalents usuels des fonctions élémentaires :

1°) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{\mathrm{sh}(\frac{\ln x}{x})}$ 2°) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \mathrm{e} \\ x < \mathrm{e}}} (\ln x)^{\ln(\mathrm{e} - x)}$

Exercice 4

1°) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, soit $f_n : x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^{-nx}$. Déterminer le maximum de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2°) En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$, où l'on pose $I_n = \displaystyle\int_0^n x^2\,\mathrm{e}^{-nx}\,dx$.

***