Epreuve d'algèbre

Première Session – Juin 2004

Durée : 2 heures — *Documents et calculettes interdits*
Les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre
Il sera tenu compte de la clarté et la précision de la rédaction
Barème : exercice 1 : 10 points, exercice 2 : 10 points

Exercice 1

1°) On considère les vecteurs $u = (-2, 0, 1)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, -1, 2)$ de $\mathbf{R}^3$. Montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.

2°) $\mathbf{R}^3$ étant muni du produit scalaire usuel, montrer que la droite D engendrée par le vecteur w est orthogonale au plan P engendré par les vecteurs u et v.

3°) Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les vecteurs $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.

4°) Expliquer pourquoi f est diagonalisable.

5°) Calculer la matrice produit ${}^tA\,A$. Que peut-on en conclure ?

6°) Donner une interprétation géométrique simple de f.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/5 \\ 1/10 & 3/5 \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que A a deux valeurs propres qui sont 1 et $\frac{1}{2}$.

2°) Trouver une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

3°) Donner l'expression de la matrice A^n pour n entier naturel arbitraire.

4°) Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de nombres réels définies par la donnée de leurs premiers termes x_0, y_0 et les formules de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}\,x_n + \frac{2}{5}\,y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}\,x_n + \frac{3}{5}\,y_n \end{cases}$$

En utilisant la question 3, calculer x_n et y_n en fonction de x_0 et y_0.

5°) En déduire $\lim_{n\to+\infty} x_n$, $\lim_{n\to+\infty} y_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

***