Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence Sciences et Technologies mention MASS — UE 21

Epreuve d'analyse

Première Session – Juin 2004

Durée : 2 heures — *Documents et calculettes interdits*
Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre
Il sera tenu compte de la clarté et la précision de la rédaction
Barème : exercice 1 : 8 points, exercice 2 : 6 points, exercice 3 : 6 points

---

Exercice 1

Dans cet exercice, α est un nombre réel et f_α est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^\alpha \ln(x)}{x^2-1}$.

1°) Quel est le domaine de définition de f_α ?

2°) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ \neq}} f_\alpha(x) = \dfrac{1}{2}$.

3°) Ecrire les développements limités, au voisinage de $h = 0$, de :

- $(1+h)^\alpha$ à l'ordre 1,
- $\ln(1+h)$ à l'ordre 2,
- $\frac{1}{2+h}$ à l'ordre 1.

4°) En déduire le développement limité à l'ordre 1 de $f_\alpha(x)$ au voisinage de $x = 1$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $(x-1)\,y' - y = \frac{1}{x}$ pour $x \in]1, +\infty[$,
- $y'' + 2\,y' - 8\,y = 8\,x + 6$ pour $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 3

1°) Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2°) Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on pose $I_\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \sqrt{1+t^2}}$. Montrer que l'intégrale impropre I_α est convergente si et seulement si α est > 0.

3°) Calculer I_1 (on pourra faire le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ et utiliser la question 1).

***