Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence Sciences et Technologies mention MASS — UE 21

Epreuve d'algèbre

Deuxième Session – Juin 2004

Durée : 1 heure 30 — *Documents et calculettes interdits*
Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre
Il sera tenu compte de la clarté et la précision de la rédaction
Barème : exercice 1 : 8 points, exercice 2 : 8 points, exercice 3 : 4 points

---

Exercice 1

1°) Montrer que les vecteurs $u = (3, 0, 1)$, $v = (-2, -1, -1)$ et $w = (1, 0, 0)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$.

2°) Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que $f(u) = u$, $f(v) = v$ et $f(w) = v + w$.

3°) Soit M la matrice de f par rapport à la base (u, v, w). Ecrire M.

4°) Vérifier que 1 est valeur propre triple de M et prouver que f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que A a deux valeurs propres qui sont 3 et -4.

2°) Trouver une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

3°) Résoudre le système différentiel suivant, où x et y sont deux fonctions d'une variable réelle t :

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y \\ y' = 6x - 6y \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $\mathbf{R}_2[X]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X, à coefficients réels, de degré ≤ 2.

Pour $P, Q \in \mathbf{R}_2[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$.

***