Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence Sciences et Technologies mention MASS — UE 21

Epreuve d'analyse

Deuxième Session – Juin 2004

Durée : 1 heure 30 — *Documents et calculettes interdits*
Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre
Il sera tenu compte de la clarté et la précision de la rédaction
Barème : exercice 1 : 6 points, exercice 2 : 7 points, exercice 3 : 7 points

---

Exercice 1

Dans cet exercice, α est un nombre réel.

1°) Ecrire les développements limités d'ordre 2, au voisinage de $x = 0$, de :

- $\dfrac{1}{1-\alpha\, x}$
- $(1+x)^\alpha$.

2°) On pose $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{1-\alpha\, x} - (1+x)^\alpha$. Calculer $\ell_\alpha = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f_\alpha(x)}{x^2}$ en fonction de α.

3°) a) Pour quelles valeurs de α a-t-on $\ell_\alpha = 0$?

b) Pour chacune de ces valeurs, calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f_\alpha(x)}{x^{2004}}$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' - 2\, y = 0$,
- $y'' - y = 0$,
- $y''' - 2\, y'' - y' + 2\, y = 0$ (transformer l'équation en introduisant la fonction $u = y' - 2\, y$).

Exercice 3

1°) On pose $h(t) = \mathrm{Arcsin}(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t)$. Montrer que $h'(t) = -\dfrac{\sin t}{\sqrt{2 - \cos^2 t}}$.

2°) Montrer que l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x\,(2-x)}}$ est convergente (on pourra faire le changement de variable $2 - x = u$).

3°) Calculer I (on pourra faire le changement de variable $2 - x = \cos^2 t$ et utiliser la question 1).

***