Université Claude Bernard

DEUG SM

Contrôle continu de Mathématiques

Fonctions de Plusieurs Variables

Mardi 4 Novembre 2003

Durée : 1 heure 30 minutes

Calculatrices et tous documents sont interdits

Exercice I. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice II. Donner le développement limité de $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ d'ordre 2 en $(0,0)$.

Exercice III. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

(1) Déterminer les extrema relatifs (locaux) de la fonction f.

(2) La fonction f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?

(3) Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0, \ y = x+1\}.$$

Déterminer les extremas absolus de la restriction de f à L et préciser en quels points de L ils sont atteints.

Exercice IV. On paramètre le cercle de rayon r par $\gamma(t) = \big(r\cos(2t), r\sin(2t)\big)$.

(1) Calculer la longueur de l'arc du cercle donné par $\gamma(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(2) Déterminer l'équation de la droite tangente au cercle en $\gamma(t_0)$.