

Université Claude Bernard - Lyon 1

Contrôle continu de Mathématiques

Cursus LMD (L1) : U.E. Mathématiques 2

Mardi 6 Avril 2004

Durée : 1 heure 30 minutes

Calculatrices et tous documents sont interdits. Il sera tenu compte de la rédaction. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice I. Fonctions de plusieurs variables

On considère la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

- (1) Préciser le domaine de définition de f . Calculer le gradient de f ainsi que la matrice hessienne de f .
- (2) Déterminer les points critiques de f et leur nature.

Exercice II. Formes différentielles

Soit $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ avec P et Q fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

- (1) Quel critère doivent vérifier les fonctions P et Q pour que ω soit une forme différentielle totale ?
- (2) Pour chacune des formes différentielles suivantes dire, en appliquant le critère précédent, si elle est totale. Si oui, trouver les fonctions f vérifiant $df = \omega$.
 - (a) $\omega = x dx + y dy$;
 - (b) $\omega = xy dx + xy dy$;
 - (c) $\omega = xy^2 dx + x^2y dy$;
 - (d) (*facultatif*) $\omega = xy^r dx + x^s y dy$ avec r, s des entiers ≥ 0 (on discutera en fonction des valeurs de r et s).

Exercice III. Champs de vecteurs et rotationnel

\mathbb{R}^3 étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère le champ de vecteurs \vec{V} donné par

$$\vec{V} = (-xy)\vec{i} + \vec{j} + (yz - 3x^2)\vec{k}$$

- (1) Calculer la divergence $\operatorname{div} \vec{V}$ de \vec{V} .
- (2) On se propose de trouver \vec{W} tel que

$$\operatorname{rot} \vec{W} \equiv \vec{V} \quad (E)$$

Pour cela, on cherche un champ \vec{W} de la forme

$$\vec{W}(x, y, z) \equiv X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

- (a) Exprimer $\frac{\partial}{\partial z} Y$ et $\frac{\partial}{\partial z} X$ en fonction de x, y, z pour qu'un tel champ \vec{W} soit solution de (E).
- (b) Déterminer un champ \vec{W} de la forme choisie solution de (E) (on ne demande pas de trouver toutes les solutions).