Université Claude Bernard

Epreuve de Mathématiques (2ème session)
MT5: Fonctions de Plusieurs Variables

Jeudi 29 janvier 2004
Durée : 1 heure 30 minutes
Calculatrices, téléphones portables et tous documents sont interdits

Exercice I. Donner le développement limité de $f(x, y) = \dfrac{e^{\cos(x+y)}}{2+y}$ à l'ordre 2 en $(0, 0)$.

Exercice II. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

définie comme la limite $I = \lim_{n \in \mathbb{N}, n \longrightarrow +\infty} I_n$, où $I_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons le quart de disque : $D_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ et le carré : $Q_n = \{0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$.

(1) Calculer les intégrales

$$J_n = \int\int_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \quad \text{et} \quad J_{2n} = \int\int_{D_{2n}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.

(2) Considerons l'intégrale

$$K_n = \int\int_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

Monterer que $K_n = I_n^2$.

(3) D'après un dessin de $D_n,\ Q_n$ et D_{2n} expliquer pourquoi $J_n \leq K_n \leq J_{2n}$.

(4) Quelle est la limite $n \to +\infty$ de J_n et de J_{2n} ? Et de K_n ? Trouver I.

Exercice III.

(1) Déterminer les points d'intersection des deux courbes de $\mathbb{R}^2$ d'équations $y = 2x$ et $y = 4x - 2x^2$ puis représenter

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x \leq y \leq 4x - 2x^2\}$$

et calculer l'aire de T.

(2) Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs de composantes P et Q données sur $\mathbb{R}^2$ par $P(x, y) = x^2, \quad Q(x, y) = 2xy$. Si Γ désigne la frontière de T orientée dans le sens direct, calculer la circulation du champ $\vec{V}$ sur Γ :

(a) en utilisant la formule de Green-Riemann,

(b) directement par le calcul de l'intégrale curviligne.