Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques II-1"

(Semestre 2, groupe 1)

Épreuve de contrôle continu

mardi 25 novembre 2003 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur une seule page.

Exercice 1

On considère la courbe paramétrée définie pour t variant dans un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ par :

$$x(t) = \frac{1}{t(t+4)} \text{ et } y(t) = t - 2 + \frac{1}{t}.$$

Étudier cette courbe et tracer son graphe (on recherchera les coordonnées du point double ; on ne fera aucune recherche de points d'inflexion éventuels ni d'étude de la concavité).

Exercice 2

On définit une suite de réels par les relations suivantes :

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = \frac{3 - u_n^2}{2}.$$

Pour tout t réel, on note $f(t) = \dfrac{3 - t^2}{2}$.

Enfin pour chaque $n \geq 0$, on note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1) Montrer que la fonction f est décroissante sur $[0, \sqrt{3}]$ et que $f([0, \sqrt{3}]) \subset [0, \sqrt{3}]$.

2) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 0$,

$$0 \leq u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \sqrt{3}.$$

3) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont monotones, et préciser leurs sens de variations respectifs ; montrer que (v_n) et (w_n) sont convergentes.

Dans les questions qui suivent, on note $a = \lim_{n \to +\infty} v_n$ et $b = \lim_{n \to +\infty} w_n$.

4) Montrer que $f(a) = b$ et que $f(b) = a$.

5) Effectuer la division euclidienne de $f(f(X)) - X$ par $(X - 1)^3$. En déduire les valeurs de a et b.

6) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.