Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques II-1"

(Semestre 2, groupe 1)

Examen terminal (première session)

lundi 5 janvier 2004 - Durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

Calculer la longueur de la courbe paramétrée définie sur $[0,\pi]$ par :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t. \end{cases}$$

Exercice 2

Dire (et justifier) si l'intégrale suivante est convergente ou divergente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{7/3} + t^{3/2}\, dt}{t^2(t^2+1)}$$

Exercice 3

Pour $t > 0$, on note $f(t) = t + \sqrt{t}$, $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+\sqrt{t}}}$ et $G(t) = \int_1^t g(u)\, du$.

Pour $n \geq 1$, on note :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}.$$

1) Montrer que f est une fonction croissante sur $]0,+\infty[$.

2) En déduire que g est une fonction décroissante sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_n^{n+1} g(u)\, du \leq \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}.$$

4) Montrer que la fonction G est croisssante, puis que $G(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$.

5) Montrer que $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

(TSVP)

Exercice 4
Soit f une application **continue** de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ telle que :

$$f(t) \to 0 \text{ quand } t \to -\infty \text{ et } f(t) \to 0 \text{ quand } t \to +\infty.$$

On note g la restriction de f à $[-1,1]$, c'est-à-dire l'application définie pour $t \in [-1,1]$ par $g(t) = f(t)$.

1) Montrer que g est bornée.

2) Montrer qu'il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que, pour $t \in]-\infty, -n[\cup]n, +\infty[$, on ait l'inégalité : $|f(t)| \leq 1$.

3) Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$.

4) Montrer que $\operatorname{Sup} f$ et $\operatorname{Inf} f$ existent.

5) Donner un exemple d'une f vérifiant les hypothèses de l'exercice, mais pour laquelle $\operatorname{Min} f$ n'existe pas.

Exercice 5
On considère la courbe paramétrée définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \dfrac{6}{3 + t^2 + t^{53}}. \end{cases}$$

1) Calculer des développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions x et y.

2) Montrer que cette courbe admet un point singulier pour la valeur $t = 0$ de la variable.

3) Déterminer la pente de la tangente au point singulier.

4) Préciser la nature de ce point singulier.